(1) Calculeu les imatges del vector $v=(-1,3)$ resp. de

(i) rotació angle $\theta=\pi/12$, (ii) rotació angle $\theta=-\pi/12$

(iii) La reflexió resp. de la recta $x+y=0$

(i) La matriu d'una rotació de centre $(0,0)$ i angle θ

és $M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Per tant, el resultat és:

$$Mv=\begin{pmatrix}\cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12)\\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos(\pi/12)-3\sin(\pi/12)\\ -\sin(\pi/12)+3\cos(\pi/12)\end{pmatrix}$$

observació: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. Ídem: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

(ii) Ara és:

$$Mv=\begin{pmatrix}\cos(-\pi/12) & -\sin(-\pi/12)\\ \sin(-\pi/12) & \cos(-\pi/12)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\end{pmatrix}$$

(iii) Si u és $\perp$ a $x+y=0$, (recta que passa pel $(0,0)$)

llavors el resultat de la reflexió del vector v és:

$w=v-2\dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$. Via els coef recta $u=(1,1)$.

Així:

$$w=(-1,3)-2\,\frac{2}{2}\,(1,1)=(-3,1)$$

$\langle u,u\rangle=2$, $\langle u,v\rangle=2$