

Geometria

MATLAB Tema 3: Àlgebra lineal numèrica

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

9 d'octubre de 2020

Si $Ax = b$ és un sistema lineal compatible i determinat, $x = A \backslash b$ ens dóna la seva solució en Matlab. Si $Ax = b$ és un sistema sobredeterminat (A amb més files que columnes), amb A de rang màxim, la comanda $x = A \backslash b$ ens dóna ara la seva solució per mínims quadrats. Com que solució per mínims quadrats s'obté resolent el sistema compatible i determinat $A^T Ax = A^T b$ (equacions normals), això vol dir que Matlab permet resoldre el sistema sobredeterminat $Ax = b$ de dues maneres:

$$x = A \backslash b \quad \text{o bé} \quad x = (A' * A) \backslash (A' * b).$$

Recordeu que el residu del sistema $Ax = b$ és el vector $r = Ax - b$ (el realment important és $\|r\|$). El sistema és compatible sí. $r = \vec{0}$.

M1/Problema 1, Apartat 1

Resoleu el següent sistema per mínims quadrats, calculeu el residu de la solució obtinguda, i deduiu si és o no compatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
>> A=[1,3;-1,2;2,0]; b=[-1;1;2];  
>> xn=(A'*A)\(A'*b) %via equacions normals  
xn' =  
    0.35065    -0.10390  
>> x=A\b %via comanda directa sistema sobredeterminat  
x' =  
    0.35065    -0.10390  
>> residu=A*x-b; norma=norm(residu) %residu i norma  
norma=    2.2792
```

M4/Problema 3, Apartat 1

Trobeu la millor aproximació per mínims quadrats a la taula de punts

x	0.25	0.50	0.75	1.00
y	0.40	0.50	0.90	1.28

de la forma

1. $y = a_0 + a_1x$ (la recta de regressió)
2. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (la paràbola de regressió)

Dibuixeu les mesures (x, y) , la recta i la paràbola de regressió. Calculeu per totes dues corbes de regressió la norma del residu.

En ambdós casos tenim més punts per ajustar (4) que no pas coeficients per la recta o la paràbola. Per tant, segurament no podrem **interpolar** els punts sinó que haurem de buscar la millor solució possible per mínims quadrats.

Els sistemes sobredeterminats a resoldre per mínims quadrats són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 1 & 0.50 \\ 1 & 0.75 \\ 1 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.90 \\ 1.28 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & (0.25)^2 \\ 1 & 0.50 & (0.50)^2 \\ 1 & 0.75 & (0.75)^2 \\ 1 & 1.00 & (1.00)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.50 \\ 0.90 \\ 1.28 \end{pmatrix}.$$

Si ho fem usant Matlab, l'alternativa a introduir aquestes matrius i resoldre els sistemes és usar la comanda `polyfit`. Si x i y són els vectors columna dels valors de x, y de la taula, els coeficients dels polinomis de regressió de grau $d = 1$ i grau $d = 2$ són, segons el cas, $p = \text{polyfit}(x, y, d)$, on el vector p els conté ordenats de grau menor a major (per tant, si $d = 1$ tenim $a_0 = p(1)$ i $a_1 = p(2)$).

```
>> x=[0.25;0.50;0.75;1.00]; y=[0.40;0.50;0.90;1.28];
>> p1=polyfit(x,y,1) % d=1 => retorna a_0, a_1
p1 =
    1.2160    0.0100
>> p2=polyfit(x,y,2) % d=2 => retorna a_0, a_1, a_2
p2 =
    1.1200   -0.1840    0.3600
```

Per pintar recta i paràbola de regressió i calcular els residus, usarem la comanda polyval (també podem calcular els residus via els sistemes lineals). Si p és un vector de coeficients d'un polinomi (com els generats usant polyfit) i X vector columna que conté una taula de valors de x , llavors $Y = \text{polyval}(p, X)$ retorna la taula de valors y que obtenim en evaluar el polinomi en la taula X .

```

>>% avaluem recta en taula x i calulem norma residu
>> y1=polyval(p1,x); residu1=y-y1; norm1=norm(residu1)
norm1 =
    0.1572
>>% avaluem parabola en taula x i calulem norma residu
>> y2=polyval(p2,x); residu2=y-y2; norm2=norm(residu2)
norm2 =
    0.0716
>>% Pintem recta, parabola i punts taula inicial
>> X=linspace(0,1,101); % taula 101 punts x en [0,1]
>> Y1=polyval(p1,X); % avaluem recta en X
>> Y2=polyval(p2,X); % avaluem parabola en X
>> hold on
>> plot(x,y,'*'); % pintem punts taula x,y
>> plot(X,Y1,'r'); % pintem recta
>> plot(X,Y2,'b'); % pintem parabola
>> hold off

```

M11/Problema 7

Calculeu la descomposició en valors singulars (SVD) de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i, en particular, dieu quina és la norma d'aquestes matrius.

En Matlab, la descomposició SVD de $A = U D V^T$ es calcula fent $[U, D, V] = \text{svd}(A)$. Si fem només $vs = \text{svd}(A)$ obtenim un vector vs amb els elements de la diagonal de D (els no nuls són els valors singulars). La norma de A és $\|A\| = \text{màxim dels valors singulars}$.

```
>> A=[2,1];  
>> svd(A)  
ans = 2.2361
```

Per tant $\|A\| = 2.2361$. Si fem:

```
>> A=[2,1];
>> [UA,DA,VA]=svd(A) % UA matriu 1x1
UA =
    -1
DA =
    2.2361      0
VA =
   -0.8944   -0.4472
   -0.4472    0.8944
```

$$A = UA \cdot DA \cdot VA^T = (-1) \begin{pmatrix} 2.2361 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.4472 & 0.8944 \end{pmatrix}.$$

```
>> C=[1 2 1;2 -1 -1];
>> [UC,DC,VC]=svd(C)
UC =
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
DC =
    2.6458      0      0
      0    2.2361      0
```

```

VC =
    0.2673    0.9487    0.1690
   -0.8018    0.3162   -0.5071
   -0.5345    0.0000    0.8452
>> S=[2 1 0; 1 2 1;0 1 2]; [US,DS,VS]=svd(S)
US =
   -0.5000    0.7071    0.5000
   -0.7071   -0.0000   -0.7071
   -0.5000   -0.7071    0.5000
DS =
    3.4142         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    0.5858
VS =
   -0.5000    0.7071    0.5000
   -0.7071    0.0000   -0.7071
   -0.5000   -0.7071    0.5000

```

$$C = UC \cdot DC \cdot VC^{\top}, \text{ on } VC = \begin{pmatrix} 0.2673 & 0.9487 & 0.1690 \\ -0.8018 & 0.3162 & -0.5071 \\ -0.5345 & 0.0000 & 0.8452 \end{pmatrix},$$

$$UC = \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix} \text{ i } DC = \begin{pmatrix} 2.6458 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2361 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = US \cdot DS \cdot VS^{\top}, \text{ on } DS = \begin{pmatrix} 3.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5858 \end{pmatrix} \text{ i}$$

$$US = VS = \begin{pmatrix} -0.5000 & 0.7071 & 0.5000 \\ -0.7071 & -0.0000 & -0.7071 \\ -0.5000 & -0.7071 & 0.5000 \end{pmatrix}.$$

La igualtat $US = VS$ és deguda a dos coses: (i) S és simètrica; (ii) tots els seus VAPs són positius (venen donats per DS).

Finalment, $\|C\| = 2.6458$ i $\|S\| = 3.4142$ (l'element més gran de la diagonal tant de DC com DS ha de ser sempre el primer).

M13/Problema 9

Quin és el valor màxim de $f(x, y, z) = x - 3y + z$ entre els vectors $v = (x, y, z)$ tals que (i) $\|v\| = 1$; (ii) $\|v\| \leq 1$; (iii) $\|v\| \leq 10$.

El màx de $f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.q. $\|v\| = 1$ o $\|v\| \leq 1$ és el 1er. valor singular de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. El vector v que assoleix el màxim és el 1er. columna de V en la descomposició SVD de $A = U D V^T$. Si volem estudiar el màxim amb $\|v\| \leq 10$, cal multiplicar per 10 el valor singular i el vector columna de V .

```
>> A=[1,-3,1]; valsing=svd(A); % A matriu d'una fila
>>% maxm cas norma <=1 i cas norma<=10
>> [valsing(1),10*valsing(1)]
ans =
    3.3166    33.1662
>> [U,D,V]=svd(A); V(:,1)' % v pel cas <=1:
ans =
   -0.3015    0.9045   -0.3015
```

M15/Problema 11 (només per A)

Hem de resoldre sistemes lineals $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

en els que cada component del terme independent b ve arrodonida a la unitat més propera. Quina cota superior podem donar per l'error amb el que obtindrem la solució?

El valor absolut de l'error màxim per arrodoniment a la unitat més propera d'un nombre és $\frac{1}{2}$ (si arrodonim al 1er decimal $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$, al 2on decimal $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$, etc.). La norma euclidiana de l'error de b és, com a molt, la norma dels errors màxims per component.

Per tant, l'error màxim de b és:

$$\text{err}(b) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.5 \cdot \sqrt{3}.$$

La norma euclidiana de l'error màxim de la solució és, com a molt, $\text{err}(b) \cdot \|A^{-1}\|$, on $\|A^{-1}\|$ és la norma de la inversa de la matriu del sistema. El valor de $\|A^{-1}\|$ és pot calcular fent: (i) Descomposició SVD de A^{-1} i agafar el seu 1er. valor singular; (ii) Comanda `norm(.)` de Matlab a la matriu A^{-1} ; (iii) Descomposició SVD de A i calculat l'invers del darrer (el més petit) valor singular de A .

```
>> A=[1,0,3;0,3,1;3,1,0];  
>> Ainv=inv(A);  
>> nAinv=norm(Ainv)  
nAinv = 0.37796  
>> errorb=0.5*sqrt(3) % cota norma euclidiana error b  
errorb = 0.86603  
>> errorxyz=nAinv*errorb  
errorxyz = 0.32733
```