

Geometria

Tema 3: Àlgebra lineal numèrica

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

27 d'octubre de 2020

Sistemes lineals incompatibles

Sigui $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (matriu de m files i n columnes), $b \in \mathbb{R}^m$ i considereu el sistema lineal $Ax = b$, de m equacions i n incògnites. Llavors: el sistema $Ax = b$ és **incompatible**, i per tant no té cap solució per $x \in \mathbb{R}^n$, síí.:

$$\begin{array}{l} \text{Sistema} \\ Ax = b \\ \text{incompatible} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b) \quad \Leftrightarrow \quad b \notin \text{Im } A$$

Això és: És incompatible si el rang de la matriu A és menor que el de la *matriu ampliada* $(A|b) \in \mathbb{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$ o, equivalentment, si el vector b no pertany a la imatge de l'aplicació lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ que defineix la matriu A .

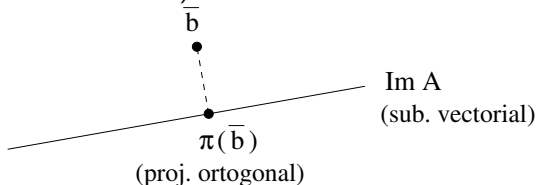
La condició de sistema incompatible és la usual en els **sistemes sobredeterminats**, quan $m > n$ (més equacions que incògnites).

El mètode dels mínims quadrats I

Malgrat si $Ax = b$ és incompatible no té solució, des del punt de vista pràctic la seva **resolució aproximada** pot esdevenir més important que la dels sistemes compatibles determinats!

La idea del **mètode dels mínims quadrats** és buscar com a millor solució aproximada de $Ax = b$ aquella que minimitza la norma del **vector residu** del sistema $Ax = b$, definida com $r(x) = Ax - b$.

En la figura visualitzem el mètode dels mínims quadrats pel sistema incompatible $Ax = \bar{b}$: Per obtenir un sistema compatible, substituïm el vector $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ en $Ax = \bar{b}$ pel vector $\pi(\bar{b})$ definit per la projecció ortogonal de $\bar{b}$ sobre el subespai vectorial $\text{Im}(A) \subset \mathbb{R}^m$ (la imatge de la matriu A).



El mètode dels mínims quadrats II

Definició

La millor solució aproximada pel mètode dels mínims quadrats del sistema lineal incompatible $Ax = b$ és el vector $\tilde{x}$ que minimitza la norma euclidiana $\|r(x)\|$ del vector residu $r(x) = Ax - b$.

Concretament, $\tilde{x}$ compleix que $A\tilde{x} - b \perp \text{Im}(A)$ (on $\text{Im}(A)$ és el subespai vectorial generat per les columnes de la matriu A) i és solució de les **equacions normals**:

$$A^T A \tilde{x} = A^T b$$

La matriu $A^T A$ és una matriu quadrada i simètrica tal que, si $\text{rang}(A)$ és màxim, compleix que $A^T A$ és definida positiva. En particular, si $\text{rang}(A)$ és màxim $\det(A^T A) \neq 0$ i les equacions normals defineixen un sistema compatible i determinat per $\tilde{x}$.

Una aplicació natural del mètode dels mínims quadrats és el càlcul de **funcions de regressió** per una taula de punts de $\mathbb{R}^2$ donada.

Recta de regressió

Donats n punts $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^2$, volem trobar la recta que millor els aproxima per mínims quadrats. Concretament, volem una funció de la forma:

$$y = f(x) = a_1 x + a_0,$$

tal que, en el cas ideal, verifiqui:

$$f(x_i) = y_i \iff a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Obtenim un sistema lineal pel vector $x = (a_1, a_0)$ que en general és incompatible però que podem resoldre per mínims quadrats:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}}_{A^T A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}}_{A^T b}$$

Paràbola de regressió

Donats n punts $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^2$, volem trobar la paràbola que millor els aproxima en el sentit dels mínims quadrats. Si

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

el corresponent sistema sobredeterminat s'obté ara imposant:

$$f(x_i) = y_i \iff a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

El sistema per $x = (a_2, a_1, a_0)$ que resollem per mínims quadrats és:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b$$

Cas general de funcions de regressió I

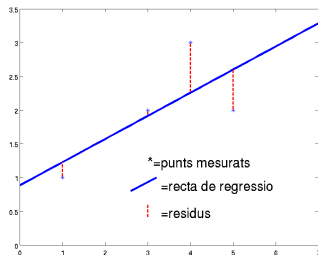
Considerem de nou la taula $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. Donades d funcions $g_1(x), \dots, g_d(x)$ busquem valors $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de forma que la funció $y = f(x) = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \dots + \lambda_d g_d(x)$ sigui la que millor aproxima la taula (en el sentit dels mínims quadrats) entre totes les possibles tries d'aquestes constants. El sistema que resollem per mínims quadrats per $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ és:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_d(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & & g_d(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \dots & g_d(x_n) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b$$

(P.ex., per la recta de regressió: $d = 2$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1$, $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_0$.)

Exemple 1: Càlcul d'una recta de regressió I

Volem trobar la recta que millor approximi per mínims quadrats els punts $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (4, 3)$, $P_4 = (5, 2)$.



El sistema lineal que hem de resoldre per $x = (a_1, a_0)$ (per mínims quadrats) s'obté demanant que la recta $y = a_1x + a_0$ passi pels punts $(x, y) = P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Concretament:

Exemple 1: Càlcul d'una recta de regressió II

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} a_1 + a_0 = 1 \\ 3a_1 + a_0 = 2 \\ 4a_1 + a_0 = 3 \\ 5a_1 + a_0 = 2 \end{cases}$$

Matricialment és el següent sistema incompatible per $x = (a_1, a_0)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_b.$$

Exemple 1: Càlcul d'una recta de regressió III

Hem de resoldre les equacions normals $A^T A x = A^T b$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

La solució per mínims quadrats l'obtenim doncs resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1: Càlcul d'una recta de regressió IV

Així, el vector $x = (a_1, a_0)$ ve donat per:

$$\begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -13 & 51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{31}{35} \end{pmatrix}$$

o bé, de forma aproximada, $(a_1, a_0) \simeq (0.3429, 0.8857)$. El residu de l'error d'aquesta solució és $r = Ax - b$, donat per:

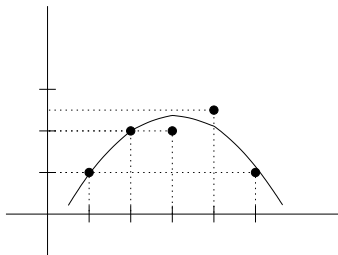
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/35 \\ -3/35 \\ -26/35 \\ 21/35 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.2286 \\ -0.0857 \\ -0.7429 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

que té norma euclidiana $\|r\| \simeq 0.9856$.

$$(\text{Si } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ té } \det B \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.)$$

Exemple 2: Càlcul d'una paràbola de regressió I

Volem la paràbola que millor approximi per mínims quadrats els punts $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (3, 2)$, $P_4 = (4, \frac{5}{2})$, $P_5 = (5, 1)$.



El sistema lineal que hem de resoldre per mínims quadrats s'obté demanant que la paràbola $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ passi pels punts $(x, y) = P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ara el vector d'incògnites és $x = (a_2, a_1, a_0)$. Concretament:

Exemple 2: Càlcul d'una paràbola de regressió II

x	y
1	1
2	2
3	2
4	2.5
5	1

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 2 \\ 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 5/2 \\ 25a_2 + 5a_1 + a_0 = 1 \end{cases}$$

Matricialment és el següent sistema per $x = (a_2, a_1, a_0)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_b$$

Exemple 2: Càlcul d'una paràbola de regressió III

Hem de resoldre les equacions normals $A^T A x = A^T b$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 279 & 225 & 55 \\ 225 & 55 & 15 \\ 55 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 5 & -30 & 35 \\ -30 & 187 & -231 \\ 35 & -231 & 322 \end{pmatrix} \text{ (no detallem els càlculs)}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ 26 \\ 17/2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2: Càlcul d'una paràbola de regressió IV

D'aquí, la solució de les equacions normals $A^T A x = A^T b$ és:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} (A^T b) = \begin{pmatrix} -9/28 \\ 277/140 \\ -7/10 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -0.3214 \\ 1.9786 \\ -0.7 \end{pmatrix}$$

i el vector residu d'aquesta solució, $r = Ax - b$, és:

$$r \simeq (0.0429, 0.0286, -0.3429, 0.4286, -0.1571).$$

Si $f(x) \simeq -0.3214x^2 + 1.9786x - 0.7$ és la paràbola de regressió calculada, el vector residu r també pot calcular-se a partir dels punts $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^5$ de la taula que hem aproximat fent:

$$\begin{aligned} r &= (f(x_1) - y_1, f(x_2) - y_2, f(x_3) - y_3, f(x_4) - y_4, f(x_5) - y_5) \\ &= (f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 2, f(4) - 5/2, f(5) - 1) \end{aligned}$$

Exemple 3: càlcul d'una regressió amb exponencials

Volem una funció de la forma $y = f(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ que approximi en sentit de mínims la taula de punts:

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	2.2	2.8	3.3	4.0	4.5	4.9	4.9	3.9

El sistema lineal sobredeterminat obtingut en demanar $f(x) = y$ per tot els punts de la taula i la solució de les eq. normals són:

$$\begin{pmatrix} e^{0.25} & e^{0.5} \\ e^{0.5} & e^1 \\ e^{0.75} & e^{1.5} \\ e^1 & e^2 \\ e^{1.25} & e^{2.5} \\ e^{1.5} & e^3 \\ e^{1.75} & e^{3.5} \\ e^2 & e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 2.8 \\ 3.3 \\ 4.0 \\ 4.5 \\ 4.9 \\ 4.9 \\ 3.9 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \approx 1.9882, \lambda_2 \approx -0.1978.$$

Exemple 4: Càlcul d'una regressió multilinear I

Volem una funció lineal de la forma $z = f(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3$ que approximi en sentit de mínims la taula de punts:

x	1	2	3	1	2	3
y	1	1	1	2	2	2
z	3.11	2.89	2.77	3.05	3.30	3.44

El sistema lineal sobredeterminat per $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ obtingut en demanar $f(x, y) = z$ per tot els punts de la taula és:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3.11 \\ 2.89 \\ 2.77 \\ 3.05 \\ 3.30 \\ 3.44 \end{pmatrix}}_b$$

Exemple 4: Càlcul d'una regressió multilinear II

Hem de resoldre les equacions normals $A^T A x = A^T b$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 18 & 12 \\ 18 & 15 & 9 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.11 \\ 2.89 \\ 2.77 \\ 3.05 \\ 3.30 \\ 3.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.13 \\ 28.35 \\ 18.56 \end{pmatrix}$$

Exemple 4: Càlcul d'una regressió multilinear III

La solució per mínims quadrats l'obtenim doncs resolent el sistema:

$$(A^T A) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^T b \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} \begin{pmatrix} 37.13 \\ 28.35 \\ 18.56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0125 \\ 0.34 \\ 2.5583 \end{pmatrix}$$

$$\text{on: } A^T A = \begin{pmatrix} 28 & 18 & 12 \\ 18 & 15 & 9 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & -12 \\ 6 & -12 & 32 \end{pmatrix}$$

(ometem els detalls). El vector residu $r = Ax - b$ de la solució és:

$$r = (0.1992, -0.0333, -0.1658, -0.2008, 0.0367, 0.1642).$$

Descomposició en valors singulars (SVD) I

Si $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matriu real (no cal quadrada), la **descomposició**

SVD de A és de la forma $A = U \cdot D \cdot V^\top$ on:

- $U \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ i $V \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ són dues matrius ortogonals (U, V són quadrades i tals que $U^\top U = \text{Id}_m$ i $V^\top V = \text{Id}_n$).
- $D \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matriu (en general no quadrada) de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_r & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

on $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ són **valors positius i decreixents** i se'ls anomena **valors singulars de A** , essent $r = \text{rang}(A)$.

Descomposició en valors singulars (SVD) II

- ▶ $A = U \cdot D \cdot V^T$ vol dir que A és el producte de les tres matrius.
- ▶ A quadrada $n \times n \implies D$ diagonal amb els r valors singulars $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ a la diagonal i, si $r < n$, el reste de la diagonal zero.
- ▶ *Interpretació de la SVD*: Suposem $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en bases canòniques de sortida i d'arribada, i $A = U \cdot D \cdot V^T$ la descomposició SVD. Llavors: D és la matriu de f en unes certes bases ortonormals (b.o.n.) $\{v_i\} = \{v_1, \dots, v_n\}$ (sortida) i $\{u_i\} = \{u_1, \dots, u_m\}$ (arribada) (això és, les components dels vectors $\{v_i\}$ són les columnes de V i les de $\{u_i\}$ són les columnes de U). Per tant, la SVD de A esdevé un canvi de base en A :

$$\underbrace{M_{\{e_i\}, \{e_i\}}(f)}_A = \underbrace{M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}}_U \cdot \underbrace{M_{\{v_i\}, \{u_i\}}(f)}_D \cdot \underbrace{M_{\{e_i\} \rightarrow \{v_i\}}}_{V^T = V^{-1}}$$

Càlcul de la SVD de A

Pas 1: Calculeu la matriu $S = A^T \cdot A$ i diagonalitzeu-la.

- ▶ $S \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ és una matriu simètrica. Pel teorema espectral té tots els seus VAPs reals i diagonalitza en una b.o.n.
- ▶ S és sempre definida o semi-definida positiva: tots els seus vaps $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ són ≥ 0 . Els ordenem de més gran a més petit: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0, r = \text{rang}(A)$.
- ▶ Calculem una b.o.n. $\{v_i\} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de VEPs de S ordenats de forma que v_i és VEP de S de VAP λ_i .

Pas 2: Calculem els valors singulars de A .

- ▶ Els r valors singulars de A són $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ (estrictament positius i ordenats de forma decreixent).
- ▶ Els VAPs nuls de A **NO** generen valors singulars de A .

Pas 3: Calculem la matriu V .

- ▶ Les columnes de $V \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ són les components en base canònica dels vectors de la base $v_1, \dots, v_n$ (*base de sortida*).

Càlcul de la SVD de A II

Pas 4: Calculem la matriu U .

- ▶ Primerament, calculem $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \dots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r$.
- ▶ Els vectors $u_1, \dots, u_r$ resulten ser r vectors ortonormals de $\mathbb{R}^m$.
- ▶ En el cas en que $r < m$, cal calcular una base ortonormal $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ dels subespai vectorial $[u_1, \dots, u_r]^\perp$.
- ▶ Els vectors $\{u_i\} = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ formen una b.o.n. de $\mathbb{R}^m$.
- ▶ Les columnes de $U \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ són les components en base canònica dels vectors de la base $u_1, \dots, u_m$ (*base d'arribada*).

ATENCIÓ: $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ i $A^\top \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tenen el mateix rang r i **els mateixos valors singulars** $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Això vol dir que, a la pràctica, podem calcular els valors singulars de A tant a partir dels VAPs no nuls de $A^\top A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ com dels de $A A^\top \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ (triem la de dimensió menor). El nombre de VAPs zero de $A^\top A$ i $A A^\top$ sí que pot diferir.

SVD d'una matriu simètrica

- ▶ Si $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ és una matriu quadrada i simètrica, llavors A diagonalitza en una b.o.n. $\{v_i\} = \{v_1, \dots, v_n\}$ i tots els seus VAPs $\mu_1, \dots, \mu_n$ són reals (μ_i VAP de A de VEP v_i).
- ▶ Ordenem els VAPs de A per valor absolut decreixent:
 $|\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_r| > 0, \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$ i $r = \text{rang}(A)$.
- ▶ Els valors singulars de A són $\sigma_1 = |\mu_1|, \dots, \sigma_r = |\mu_r|$ (no cal fer cap arrel quadrada). La matriu D és la matriu diagonal que té com elements de la diagonal $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ i el reste zeros.
- ▶ La matriu V és la que té per columnes les components dels vectors $\{v_1, \dots, v_n\}$.
- ▶ La matriu U és com la matriu V excepte per les columnes de U definides per VEPs v_i de VAP μ_i **estrictament negatiu**. Per aquests valors de i , la columna i de U no són ara les components de v_i sinó les de $-v_i$ (cal canviar el signe del vector v_i).

Exemple 1 de descomposició SVD I

Exemple

Sigui $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ la matriu en base canònica de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Calculeu la seva SVD.

- En aquest cas A quadrada i $n = m = 2$ i a més $r = \text{rang}(A) = 2$.
- Calculem $S = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$.
- $\lambda_1 = 100$ i $\lambda_2 = 25$ VAPs de S ordenats de major a menor.
- $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 10$ i $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 5$ són els 2 valors singulars de A .
- $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (S no té cap VAP nul).
- $v_1 = (0, 1)$ i $v_2 = (1, 0)$ és una b.o.n. de VEPS de A (on v_i VEP de VAP λ_i). Aquesta és la *base de sortida*.

Exemple 1 de descomposició SVD II

- La matriu $V \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ té per columnes v_1 i v_2 : $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- La *base d'arribada* $\{u_1, u_2\}$ és:
$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(com que $n = m = 2$ no cal completar la base d'arribada).
- La matriu $U \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ té per columnes u_1 i u_2 : $U = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.
- La SVD de A (o de f) és $A = U D V^T$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Exemple 1 de descomposició SVD III

Aplicació de la SVD de A :

- Si A és la matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'expressió $A = U D V^\top$ vol dir que si considerem b.o.n. $\{v_i\} = \{v_1, v_2\}$ de sortida i $\{u_i\} = \{u_1, u_2\}$ d'arribada, la matriu de f en aquestes bases és $M_{\{v_i\}, \{u_i\}}(f) = D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
- Per tant, si $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ són les coordenades de $\mathbb{R}^2$ en bases $\{v_i\}$ i $\{u_i\}$, respectivament, l'expressió de f en coordenades és:
 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = (10\bar{x}, 5\bar{y})$.
- Com que $\{u_i\}$ i $\{v_i\}$ són bases ortonormals el càlcul de longituds i distàncies usant coordenades en una o l'altre base dóna el mateix resultat. P.ex., si $w \in \mathbb{R}^2$ té $(w)_{\{e_i\}} = (x, y)$ (en base canònica), $(w)_{\{v_i\}} = (\bar{x}, \bar{y})$ i $(w)_{\{u_i\}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, llavors:
$$\|w\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\bar{x})^2 + (\bar{y})^2} = \sqrt{(\tilde{x})^2 + (\tilde{y})^2}.$$

Exemple 1 de descomposició SVD IV

- Sigui S^1 la circumferència unitat de $\mathbb{R}^2$ (centre $(0,0)$ i radi 1). Pel comentari anterior, l'expressió de S^1 en coord. canòniques (x,y) i en coord. $(\bar{x},\bar{y})$ en base (de sortida) $\{v_i\}$ és:

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1\}.$$

- Com l'expressió de f usant coord. en bases $\{v_i\}$ i $\{u_i\}$ és:

$$\tilde{x} = 10\bar{x}, \tilde{y} = 5\bar{y} \iff \bar{x} = \frac{\tilde{x}}{10}, \bar{y} = \frac{\tilde{y}}{5},$$

la imatge de S^1 per f en coord. de la base $\{u_i\}$ d'arribada és:

$$f(S^1) = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(\tilde{x})^2}{10^2} + \frac{(\tilde{y})^2}{5^2} = 1 \right\}.$$

- Per tant, $f(S^1)$ esdevé una el·lipse amb eixos u_1 i u_2 i semi-eix major 10 i semi-eix menor 5: precisament els valors singulars de A .

Exemple 1 de descomposició SVD V

Figura SVD



Què ha passat doncs? En aplicar f a la circumferència S^1 , no obtenim una nova circumferència sinó una el·lipse en que la direcció del vector u_1 s'ha estirat multiplicant per $\sigma_1 = 10$ (màxim estirament) i la del vector u_2 s'ha estirat multiplicant per $\sigma_2 = 5$ (mínim estirament).

Exemple 2 de descomposició SVD I

Exemple

Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriu en base canònica de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Calculeu la seva SVD.

- En aquest cas $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on $n = 3$, $m = 2$ i $r = \text{rang}(A) = 2$.

- $S = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- El polinomi característic de S és:

$$P_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \lambda (\lambda - 6).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(1-\lambda)[(5-\lambda)(1-\lambda)-1-4]}$

Exemple 2 de descomposició SVD II

- Els VAPs de S , de major a menor, són $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 0$.
(No cal fer-ho, però $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dóna una matriu 2×2 que té com a VAPs $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = 1$: els mateixos VAPs no nuls que S).
- $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6}$ i $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$ són els valors singulars de A .
- $D = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matriu del mateix tamany que A que té σ_1 i σ_2 a la “diagonal” i el reste ho omplim amb zeros.
- La base de sortida $\{v_i\}$ és una b.o.n. de VEPs de S :
 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5, -2, 1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$.
- La matriu $V \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ té per columnes v_1, v_2, v_3 :
$$V = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \text{ (Detalls càlcul } \{v_i\} \text{ més endavant.)}$$

Exemple 2 de descomposició SVD III

- La base d'arribada $\{u_1, u_2\}$ és la b.o.n. següent

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(Només intervenen els VEPs v_1, v_2 de S de VAP **no nul**. Com que la dimensió d'arribada és $m = 2$ no cal completar la base $\{u_1, u_2\}$.)

- La matriu $U \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ té per columnes u_1, u_2 :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 de descomposició SVD IV

- La SVD de A (o de f) és $A = U D V^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T.$$

- $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ coord. de $\mathbb{R}^3$ en base de sortida $\{v_i\}$ i $(\tilde{x}, \tilde{y})$ coord. de $\mathbb{R}^2$ en base d'arribada $\{u_i\}$. Llavors, l'expressió de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en aquestes coord. és $(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\sqrt{6}\bar{x}, \bar{y})$.

- Per tant, la relació entre les coord. de sortida i arribada és:

$$\tilde{x} = \sqrt{6}\bar{x}, \quad \tilde{y} = \bar{y} \iff \bar{x} = \tilde{x}/\sqrt{6}, \quad \bar{y} = \tilde{y},$$

mentres que la coord. $\bar{z}$ és enviada a zero per f (com l'aplicació f va de l'espai $\mathbb{R}^3$ al pla $\mathbb{R}^2$ una direcció ha de "col·lapsar").

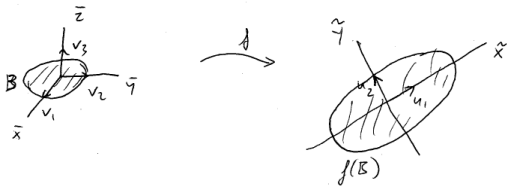
Aplicació de la SVD de A : Sigui $B = \bar{B}_1^3(0,0,0)$ la bola unitat (tancada) de $\mathbb{R}^3$ (bola de centre $(0,0,0)$ i radi 1). Calculeu $f(B)$ (la imatge de la bola B per f).

Exemple 2 de descomposició SVD V

- L'expressió de B tant en coord. cartesianes (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ com en coord. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ en la b.o.n. de sortida $\{v_i\}$ és:
$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \mid \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \leq 1\}.$$
- Usant la relació $\bar{x} = \tilde{x}/\sqrt{6}$, $\bar{y} = \tilde{y}$ entre les coord. $(\bar{x}, \bar{y})$ de sortida i $(\tilde{x}, \tilde{y})$ d'arribada i que $\bar{z}$ va a zero per f , obtenim que:
$$f(B) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(\tilde{x})^2}{(\sqrt{6})^2} + (\tilde{y})^2 \leq 1\} \implies f(B) \text{ domini tancat}$$

per una el·lipse d'eixos u_1 , u_2 i semi-eixos $\sqrt{6}$, 1.

Figura SVD3



Exemple 2 de descomposició SVD VI

Càlcul de $\{v_1, v_2, v_3\}$ b.o.n. de VEPs de $S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda_1 = 6$, $v_1 = (x, y, z) \in \text{Nuc}(S - \lambda_1 \text{Id}_3)$ vol dir:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left. \begin{aligned} -x - 2y + z &= 0 \\ -2x - 5y &= 0 \\ x - 5z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Són 3 eqs. l.d.: treiem la 1a ja que clarament les altres 2 són l.i.

Obtenim: $y = -\frac{2}{5}x$, $z = \frac{1}{5}x$. Fent: $x = 5 \implies y = -2$, $z = 1$.

Normalitzant $(x, y, z) = (5, -2, 1)$ obtenim $v_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5, -2, 1)$.

- $\lambda_2 = 1$, $v_2 = (x, y, z) \in \text{Nuc}(S - \lambda_2 \text{Id}_3)$ vol dir:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} &\text{Obtenim } x = 0, z = 2y. \\ &\text{Fent } y = 1 \implies z = 2 \end{aligned}$$

Normalitzant $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ obtenim $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$.

Exemple 2 de descomposició SVD VII

- $\lambda_3 = 0$, $v_3 = (x, y, z) \in \text{Nuc}(S - \lambda_3 \text{Id}_3)$ vol dir:

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} 5x - y + z = 0 \\ -2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

Treiem la 1a eq. ja que clarament les altres 2 són l.i. Obtenim:

$y = 2x$, $z = -x$. Fent $x = -1 \implies y = -2$, $z = 1$.

Normalitzant $(x, y, z) = (-1, -2, 1)$ obtenim $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$.

- Observeu que com $\{v_1, v_2, v_3\}$ sabem a priori que són $\perp$, un cop calculats v_1 i v_2 (p.ex.), també podem calcular v_3 directament via el producte vectorial: $v_3 = v_1 \wedge v_2$.

Norma euclidiana d'una matriu I

Donada una matriu $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la seva **norma euclidiana** $\|A\|$ ens serveix per mesurar el “tamany” de la matriu. És defineix com:

$$\|A\| = \max_{v \neq \vec{0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \max_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Això vol dir que per calcular $\|A\|$ hem de buscar el màxim valor del quocient $\frac{\|Av\|}{\|v\|}$ entre tots els vectors $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si bé, de fet, ens podem restringir als vectors $v \in \mathbb{R}^n$ unitaris.

El càlcul de $\|A\|$ és un subproducte de la seva descomposició SVD. En el que segueix, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ són els valors singulars de A i $v_1, \dots, v_n$ la **base de sortida** de la seva SVD.

Norma euclidiana d'una matriu II

Propietats de $\|A\|$ (i la seva relació amb la SVD):

1. $\|A\| = \sigma_1$. (σ_1 valor singular més gran de A .)
2. $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$ si A és invertible (cal $n = m = r$).
3. $\|A\|$ *estirament màxim* que pot rebre un vector al aplicar-li A :
$$\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$
4. Si $K > 0$ és donat, llavors:
$$\max_{\|v\| \leq K} \|Av\| = \max_{\|v\|=K} \|Av\| = K\sigma_1,$$

i aquest màxim s'assoleix quan v és $v = \pm Kv_1$.
5. $\min_{\|v\|=1} \|Av\| = \begin{cases} \sigma_n & \text{si } A \text{ té rang } n \text{ (i s'assoleix en } \pm v_n) \\ 0 & \text{si } A \text{ té rang } < n. \end{cases}$

Norma euclidiana d'una matriu III

Aplicació de $\|A\|$ a la propagació d'errors sistemes lineals:

Volem resoldre un sistema d'equacions lineals $Ax = b$ compatible i determinat, on $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Sabem que la solució és $x = A^{-1}b$. En *el món real*, en formular el sistema cometem *errors de mesura* en representar numèricament els elements de A i b .

P.ex., suposem que coneixem A de forma exacta, però el vector b el coneixem amb un error Δb . Llavors, enlloc de resoldre $Ax = b$, estem resolent $Ay = b + \Delta b$ i el que fem és aproximar la **solució exacta** x (la que obtindriem si no cometessim cap error) per la **solució aproximada** y .

No és realista pensar que l'error Δb és conegut exactament, però sí que és raonable pensar que podem controlar el seu tamany $\|\Delta b\|$.

Qüestió: Què podem dir de l'error en el resultat $\|y - x\|$ en terme dels errors de mesura en les dades?

Norma euclidiana d'una matriu IV

Suposem, p.ex., que cada component de b la coneixem per arrodoniment a 2 xifres decimals. Llavors, l'error de cada component és, com a molt, $\frac{1}{2}10^{-2}$ i aquest és doncs el tamany màxim de cada component de Δb . Conseqüentment, el tamany màxim de $\|\Delta b\|$ ("l'error en les dades") és:

$$\|\Delta b\| \leq \sqrt{(\frac{1}{2}10^{-2})^2 \times n} = \frac{1}{2}10^{-2} \cdot \sqrt{n}.$$

Finalment, l'error de la solució el podem controlar rigorosament a partir de la norma de A^{-1} . Així:

$$\underbrace{\|y - x\|}_{\text{error en la solució}} \leq \|A^{-1}\| \cdot \underbrace{\|\Delta b\|}_{\text{error en les dades}}.$$

Aproximació de A per matrius de rang baix I

- Podem usar la SVD de per aproximar A per matrius de rang petit: per tant, aproximar A per matrius amb una estructura més simple, que són més “econòmiques” d'emmagatzemar o de transmetre electrònicament que no pas una matriu A plena.

- Donada $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, considerem la seva SVD:

$$A = U \cdot D \cdot V^T, \quad U = \underbrace{[u_1 | \cdots | u_m]}_{\text{b.o.n. arribada}}, \quad V = \underbrace{[v_1 | \cdots | v_n]}_{\text{b.o.n. sortida}}$$

i $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ són els seus valors singulars, on $r = \text{rang}(A)$.
(S'entén que els vectors u_i i v_i són vectors columna.)

- Triem $k \leq r$. Volem aproximar A per la matriu $A_k \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang k que millor aproxima A , en el sentit de la norma euclidiana, entre totes les matrius $X \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang k :

$$\|A - A_k\| = \min_{\text{rang}(X)=k} \|A - X\|.$$

Aproximació de A per matrius de rang baix II

- La matriu A_k de rang $k \leq r$ que millor aproxima A en el sentit de la norma euclidiana és:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \underbrace{u_i \cdot v_i^{\top}}_{\text{matriu } m \times n}.$$

En el cas en que triem $k = r = \text{rang}(A)$, el resultat és $A_r = A$.
A més, l'error en l'aproximació de A per A_k és:

$$\|A - A_k\| = \begin{cases} \sigma_{k+1} & \text{si } k < r \\ 0 & \text{si } k = r \end{cases}$$