

# Geometria

## Tema 2: Productes escalars i formes quadràtiques

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).  
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

8 de setembre de 2021

## Definició

El producte escalar euclidià  $\langle u, v \rangle$  de dos vectors  $u, v$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

és

$$\langle u, v \rangle := u^T \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n.$$

## Comentaris:

- ▶ Quan parlem de vectors, per defecte sempre entendrem que són vectors columna.
- ▶ El producte escalar euclidià de  $\mathbb{R}^n$  ens permet, per exemple, mesurar la longitud d'un vector, calcular la distància entre dos punts i l'angle entre dos vectors. Això ho formalitzem en les properes definicions.

## Algunes definicions

1. La norma o longitud del vector  $u \in \mathbb{R}^n$  és  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .
2. Un vector  $u$  és es diu unitari sí.  $\|u\| = 1$ .
3. Si un vector  $v$  és diferent de 0, el podem normalitzar fent  $\frac{v}{\|v\|}$   
(vector unitari de la mateixa direcció i sentit que  $v$ ).
4. La distància euclidia entre dos punts  $P, Q$  de  $\mathbb{R}^n$  és  $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\|$ .
5. L'angle  $\alpha = \widehat{uv}$  format per dos vectors  $u, v \in \mathbb{R}^n$  compleix

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

El signe de  $\alpha$  depèn de l'orientació triada.

6. Direm que dos vectors  $u, v$  de  $\mathbb{R}^n$  són ortogonals (escrivem  $u \perp v$ ) quan el seu producte escalar sigui zero:  $\langle u, v \rangle = 0$ .  
(Equivalent a dir  $\widehat{uv} = \pm \frac{\pi}{2}$ .)

## Definició

Sigui  $F \subset \mathbb{R}^n$  un subespai vectorial. Llavors, el seu subespai vectorial ortogonal és:

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \perp v \text{ per tot } v \in F\}.$$

(Els vectors de  $F^\perp$  són aquells que són ortogonals a **TOTS** els vectors de  $F$  o, almenys, als vectors d'una base de  $F$ .)

### Comentaris:

1.  $\dim F^\perp = n - \dim F$ .
2.  $(F^\perp)^\perp = F$ .
3. Si coneixem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{una base} \\ \text{equacions implícites} \end{array} \right\}$  del s.e.v.,  $F$  llavors és immediat obtenir  $\left\{ \begin{array}{l} \text{equacions implícites} \\ \text{una base} \end{array} \right\}$  del s.e.v.  $F^\perp$ .

De fet: Els vectors d'una base de  $F$  donen els coeficients de les equacions de  $F^\perp$  i els coeficients de les equacions (independents) de  $F$  donen una base de  $F^\perp$  (i viceversa).

## Exemple

Base	Equacions independents
$F = [(1, 3, 2), (-2, 1, 8)]$	$\Leftrightarrow F^\perp : \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + y + 8z = 0 \end{cases}$
$G = [(3, -5, \frac{11}{2})]$	$\Leftrightarrow G^\perp : \{3x - 5y + \frac{11}{2}z = 0\}$

## Problema 1(iii)

Base i equacions del s.e.v.  $F_3^\perp$  de  $\mathbb{R}^4$  si  $F_3$  donat per les equacions  $F_3 = \{x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$ .

Restant les dues equacions de  $F_3$ , podem aïllar:

$$x_4 = -4x_2 + 5x_3 \quad \text{i} \quad x_1 = -5x_2 + 6x_3.$$

- Fent  $x_2 = 1, x_3 = 0 \implies x_4 = -4, x_1 = -5 \implies (-5, 1, 0, -4)$ .
- Fent  $x_2 = 0, x_3 = 1 \implies x_4 = 5, x_1 = 6 \implies (6, 0, 1, 5)$ .

Per tant, obtenim la base  $F_3 = [(-5, 1, 0, -4), (6, 0, 1, 5)]$ . D'aquí:

$$\begin{aligned} F_3^\perp &= [(1, 1, -1, -1), (1, -3, 4, -2)] \\ &= \{-5x_1 + x_2 - 4x_4 = 0, 6x_1 + x_3 + 5x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

**Comentari:** També podem usar les equacions de  $F_3$  per generar una base de  $F_3^\perp = [(1, 1, -1, -1), (1, -3, 4, -2)]$ , i aplicar el mètode del pivot a la matriu que té per columnes els vectors de la

base per generar les equacions de  $F_3^\perp$ : 
$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -3 & x_2 \\ -1 & 4 & x_3 \\ -1 & -2 & x_4 \end{array} \right) \text{ Pas 1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -4 & x_2 - x_1 \\ 0 & 5 & x_3 + x_1 \\ 0 & -1 & x_4 + x_1 \end{array} \right) \text{ Pas 2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -5x_1 + x_2 - 4x_4 \\ 0 & 0 & 6x_1 + x_3 + 5x_4 \\ 0 & -1 & x_4 + x_1 \end{array} \right),$$

on, hem fet:

$$\text{Pas 1} = \{f_2 = f_2 - f_1, f_3 = f_3 + f_1, f_4 = f_4 + f_1\},$$

$$\text{Pas 2} = \{f_2 = f_2 - 4f_4, f_3 = f_3 + 5f_4\}.$$

D'aquí, obtenim:  $F_3^\perp = \{-5x_1 + x_2 - 4x_4 = 0, 6x_1 + x_3 + 5x_4 = 0\}$ .

Recordem: si un s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$  té  $p$  equacions (lineals i homogènies) independents, la seva dimensió és  $n - p$ .

## Definició

El producte vectorial de dos vectors  $u = (a, b, c)$  i  $v = (e, f, g)$  de  $\mathbb{R}^3$ , expressats en base canònica o en qualsevol base ortonormal directa de  $\mathbb{R}^3$ , és el vector:  $w = u \wedge v = u \times v$ , donat per:

$$\begin{aligned} w = u \wedge v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} k \\ &= (bg - cf, ce - ag, af - be). \end{aligned}$$

**Propietats producte vectorial:**  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  vectors qualsevol.

- ▶  $v \wedge u = -u \wedge v$  (anti-commutatiu).
- ▶  $\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w)$ . (= determinant de la matriu que té per columnes les components de  $u, v, w$  en base canònica.)
- ▶  $u \wedge v \perp u, v \iff u \wedge v$  és ortogonal a  $u$  i  $v$ .
- ▶  $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{uv})|$ .
- ▶  $u \wedge v = 0 \iff u \parallel v \iff u, v$  linealment dependents.
- ▶  $u, v$  linealment independents  $\implies \{u, v, u \wedge v\}$  forma una base directa de  $\mathbb{R}^3$ . (Si  $u \perp v$ , llavors la base és ortogonal.)

## Definició (Projecció ortogonal d'un vector sobre un s.e.v.)

$\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$  per tot subespai vectorial  $F$ . Això vol dir que tot vector  $v \in \mathbb{R}^n$  es pot escriure (de manera única) com a suma de:

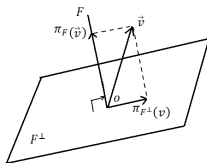
$$v = v^F + v^{F^\perp},$$

$v^F$  és un vector de  $F$  i  $v^{F^\perp}$  de  $F^\perp$ . Llavors, direm que:

- $v^F = \Pi_F(v)$  és la projecció ortogonal de  $v$  sobre el s.e.v.  $F$ .
- $v^{F^\perp} = \Pi_{F^\perp}(v)$  és la projecció ortogonal de  $v$  sobre el s.e.v.  $F^\perp$ .

La projecció ortogonal  $v^F = \Pi_F(v)$  de  $v$  sobre  $F$  és el vector de  $F$  que fa mínima la distància de  $v$  a  $F$  (el mínim val  $\|\Pi_{F^\perp}(v)\|$ ):

$$\|v - \Pi_F(v)\| = \min_{w \in F} \{\|v - w\|\}.$$



## Càlcul de la projecció ortogonal I

Sigui  $F$  un sub-espai vectorial de  $\mathbb{R}^n$  de dimensió  $d$  i  $v$  un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Volem calcular  $\Pi_F(v)$  projecció ortogonal de  $v$  en  $F$ . Siguin:

- $F = [u_1, \dots, u_d]$  base de  $F$ .
- A matriu  $n \times d$  que té per columnes les components dels vectors  $u_1, \dots, u_d$  en base canònica o en qualsevol base ortonormal.

Si expressem la projecció ortogonal de  $v$  en  $F$  com:

$$\Pi_F(v) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d,$$

els coeficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  són solució del sistema d'equacions lineals

$$A^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} = A^T v.$$

La fórmula tancada és, de fet:

$$\Pi_F(v) = A(A^T A)^{-1} A^T v.$$

(Malauradament involucra el càlcul de la matriu inversa  $(A^T A)^{-1}$ .)

## Càlcul de la projecció ortogonal II

**Formulació pràctica:** La matriu  $A^T A$  és la matriu (simètrica) dels productes escalars dels vectors de la base  $F = [u_1, \dots, u_d]$ . Llavors:

$$\Pi_F(v) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d,$$

on  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  són solució del sistema d'equacions lineals:

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_d, u_1 \rangle & \dots & \langle u_d, u_d \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_d \rangle \end{pmatrix}.$$

### Cas unidimensional

- Si  $F = [w]$  és un s.e.v. de dimensió  $d = 1$ , és té:

$$\Pi_F(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

- Si és  $F^\perp$  qui té dimensió 1, podem calcular:

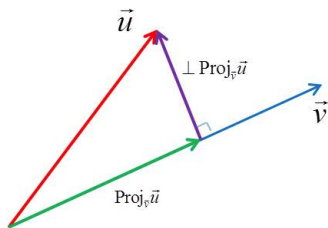
$$\Pi_F(v) = v - \Pi_{F^\perp}(v).$$

Observació: A  $\mathbb{R}^3$ , o bé  $F$  o bé  $F^\perp$  tenen dimensió 1.

## Exemple 1

Calculeu  $w = \Pi_F(u)$ , projecció ortogonal de  $u = (2, 3, 1)$  en el s.e.v.  $F = \{x - 5y + 2z = 0\}$ .

- ▶  $\dim F = \dim \mathbb{R}^3 - (\text{nombre d'equacions independents de } F) = 2$ .
- ▶  $\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 1$ .
- ▶ Calcularem primer  $\Pi_{F^\perp}(u)$  i després  $\Pi_F(u) = u - \Pi_{F^\perp}(u)$ .
- ▶ Per calcular  $\Pi_{F^\perp}(u)$ , observem que a partir dels coeficients de l'equació de  $F$  es té  $F^\perp = [v]$ , on  $v = (1, -5, 2)$ .
- ▶ En la figura inferior,  $\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u}$  representa  $\Pi_{F^\perp}(u) = \Pi_{[v]}(u)$ , mentres que  $\perp \text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u}$  representa  $\Pi_F(u) = u - \Pi_{F^\perp}(u)$ .



## Exemple 1 (continuació)

Tenim

$$v = (1, -5, 2), \quad F^\perp = [v].$$

Per tant:

$$\begin{aligned}\Pi_{F^\perp}(u) &= \Pi_{[v]}(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \frac{\langle (2, 3, 1), (1, -5, 2) \rangle}{\langle (1, -5, 2), (1, -5, 2) \rangle} (1, -5, 2) \\ &= -\frac{11}{30}(1, -5, 2).\end{aligned}$$

Finalment:

$$w = \Pi_F(u) = u - \Pi_{F^\perp}(u) = (2, 3, 1) + \frac{11}{30}(1, -5, 2) = \frac{1}{30}(71, 35, 52).$$

## Exemple 2 (I)

Calculeu  $w = \Pi_F(v)$ , projecció ortogonal de  $v = (-1, 1, 4)$  en

$$F = [\underbrace{(2, 1, 1)}_{u_1}, \underbrace{(1, 0, 2)}_{u_2}].$$

• **Opció 1:** Busquem  $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ , on  $\lambda_1, \lambda_2$  són solució del

sistema d'equacions lineals  $A^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^T v$ , on  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$   
matriu que té per columnes les components dels vectors  $u_1, u_2$  de  
la base de  $F$ . Així doncs:  $A^T v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ , i

$$A^T A = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 2 (II)

Hem de resoldre doncs (observem  $\det(A^T A) = 14$ ):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A^T A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{A^T v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{A^T v} \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}}_{(A^T A)^{-1}} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{14} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix},$$

i calculem  $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = -\frac{13}{14} u_1 + \frac{15}{7} u_2 = \frac{1}{14}(4, -13, 47)$ .

• **Opció 2:**  $\dim F = 2 \implies \dim F^\perp = 1 \implies$  calculem  $\Pi_{F^\perp}(v)$  i  $w = \Pi_F(v) = v - \Pi_{F^\perp}(v)$ . Usant  $F = [u_1, u_2] = [(2, 1, 1), (1, 0, 2)]$  obtenim que  $F^\perp = \{2x + y + z = 0, x + 2z = 0\}$ . Fent  $z = 1$  en aquestes equacions obtenim  $x = -2$  i  $y = 3$ . Per tant  $F^\perp = [u]$  on  $u = (-2, 3, 1)$ . D'aquí,  $\Pi_{F^\perp}(v) = \Pi_{[u]}(v)$  és:

$$\Pi_{F^\perp}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{\langle (-1, 1, 4), (-2, 3, 1) \rangle}{\langle (-2, 3, 1), (-2, 3, 1) \rangle} (-2, 3, 1) = \frac{9}{14}(-2, 3, 1).$$

Finalment:

$$w = \Pi_F(v) = v - \Pi_{F^\perp}(v) = (-1, 1, 4) - \frac{9}{14}(-2, 3, 1) = \frac{1}{14}(4, -13, 47).$$

## Definició (Projecció ortogonal punts sobre varietats lineals)

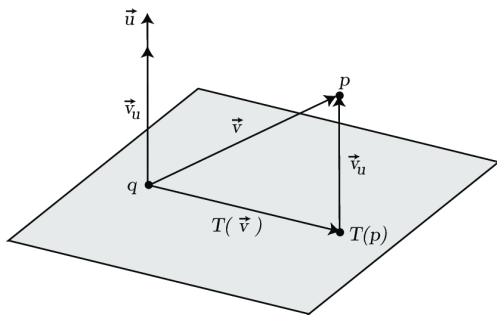
La projecció ortogonal d'un punt  $P \in \mathbb{R}^n$  sobre una varietat lineal  $V \subset \mathbb{R}^n$ , que té sub-espai vectorial director  $F$ , és l'únic punt  $Q = \Pi_V(P)$  de  $V$  tal que el vector  $\overrightarrow{PQ} = Q - P \perp F$ . Així:

$$\Pi_V(P) = V \cap (P + F^\perp).$$

( $\Pi_V(P)$  és la intersecció de la varietat  $V$  amb la varietat lineal per  $P$  que té s.e.v. director donat per  $F^\perp$ .)

- **Càlcul de la projecció  $\Pi_V(P)$ .** Suposem que  $V = a + F$ , on  $a \in V$  n'es un punt qualsevol, llavors:

$$\underbrace{\Pi_V(P)}_{\text{projecció d'un punt}} = a + \underbrace{\Pi_F(\overrightarrow{aP})}_{\text{projecció d'un vector}} .$$



En la figura, la varietat  $V$  és un pla que passa pel punt  $q$  i  $\vec{u} \perp V$ . La projecció ortogonal  $\Pi_V(p)$  de  $p$  sobre  $V$  ve donada pel punt  $T(p) \in V$ , essent el vector  $\vec{v}_u$  que uneix  $T(p)$  amb  $p$  paral·lel a  $\vec{u}$  i, per tant, perpendicular a  $V$ . Observeu que, d'acord amb la fórmula del peu de la pàgina anterior,  $T(p) = q + T(\vec{v})$ , on  $T(\vec{v})$  és la projecció ortogonal sobre el sub-espai vectorial director de  $V$  del vector que uneix  $q \in V$  amb  $p$ .

## Definició (Distància entre varietats)

- ▶ La distància entre un punt  $P$  i una varietat lineal  $V$  és

$$d(P, V) := \min_{Q \in V} d(P, Q),$$

i coincideix amb el valor de  $d(P, \Pi_V(P))$ , ja que  $\Pi_V(P) \in V$  és el punt de  $V$  més proper a  $P$ .

- ▶ La distància entre dues varietats lineals  $V_1$  i  $V_2$  és

$$d(V_1, V_2) := \min_{P \in V_1, Q \in V_2} d(P, Q),$$

i coincideix amb  $d(P_1, P_2)$  on  $P_1 \in V_1, P_2 \in V_2$  són punts tals que  $\overrightarrow{P_1 P_2} \perp V_1$  i  $V_2$  simultàniament. (Atenció: Aquests punts  $P_1, P_2$  que donen la mínima distància entre  $V_1$  i  $V_2$  no tenen perquè ser únics. Penseu en el cas en que  $V_1 \parallel V_2$ .)

- ▶ Si  $V_1 = a_1 + F_1, V_2 = a_2 + F_2$ , llavors podem calcular:

$$d(V_1, V_2) = \|u\|, \quad \text{on} \quad u = \Pi_{(F_1+F_2)^\perp}(\overrightarrow{a_1 a_2}).$$

## Exemple 1

Calculeu  $Q = \Pi_V(P)$ , on  $P = (3, -2, 3)$  i  $V = \{x + 2y + 3z = 1\}$ .

- ▶ Fent  $y = z = 0$  en l'equació de  $V$  triem  $a = (1, 0, 0) \in V$ .
- ▶  $Q = \Pi_V(P) = a + \Pi_F(\overrightarrow{aP})$ , on  $F = \{x + 2y + 3z = 0\}$  és el s.e.v. director del pla  $V$ .
- ▶  $\Pi_F(\overrightarrow{aP}) = \overrightarrow{aP} - \Pi_{F^\perp}(\overrightarrow{aP})$ , on  $F^\perp = [v]$ , essent  $v = (1, 2, 3)$  el vector definit pels coeficients de l'equació de  $F$ .
- ▶ Usant que  $\overrightarrow{aP} = P - a = (3, -2, 3) - (1, 0, 0) = (2, -2, 3)$ :

$$\begin{aligned}\Pi_{F^\perp}(\overrightarrow{aP}) &= \Pi_{[(1,2,3)]}(2, -2, 3) = \frac{\langle (2, -2, 3), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle} (1, 2, 3) \\ &= \frac{7}{14} (1, 2, 3) = \frac{1}{2} (1, 2, 3).\end{aligned}$$

- ▶  $\Pi_F(\overrightarrow{aP}) = \overrightarrow{aP} - \Pi_{F^\perp}(\overrightarrow{aP}) = (2, -2, 3) - \frac{(1, 2, 3)}{2} = \left(\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2}\right)$
- ▶  $Q = a + \Pi_F(\overrightarrow{aP}) = (1, 0, 0) + \left(\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -3, \frac{3}{2}\right)$ . Així:

$$d(P, V) = d(P, \Pi_V(P)) = \|\overrightarrow{QP}\| = \left\| \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \right\| = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

## Exemple 2

Calculeu  $Q = \Pi_l(P)$ , on  $P = (-1, 4, 3)$  i  $l = (2, 4, 1) + [(-1, 3, 7)]$ .

- ▶ Triem  $a = (2, 4, 1) \in l$ , i calculem

$$Q = \Pi_l(P) = a + \Pi_F(\overrightarrow{aP}),$$

on  $F = [v]$ , amb  $v = (-1, 3, 7)$ , és el s.e.v. director recta  $l$ .

- ▶ Usant que  $\overrightarrow{aP} = P - a = (-1, 4, 3) - (2, 4, 1) = (-3, 0, 2)$ :

$$\begin{aligned}\Pi_F(\overrightarrow{aP}) &= \Pi_{[(-1,3,7)]}(-3, 0, 2) = \frac{\langle (-3, 0, 2), (-1, 3, 7) \rangle}{\langle (-1, 3, 7), (-1, 3, 7) \rangle} (-1, 3, 7) \\ &= \frac{17}{59} (-1, 3, 7).\end{aligned}$$

- ▶  $Q = a + \Pi_F(\overrightarrow{aP}) = (2, 4, 1) + \frac{17}{59}(-1, 3, 7) = \frac{(101, 287, 178)}{59}$ .
- ▶ En particular, podem calcular  $d(P, l) = d(P, \Pi_l(P)) = \|\overrightarrow{QP}\|$ .

## Problema 4

Siguin  $r_1 = (0, -2, 0) + [(3, 1, 1)]$  i  $r_2 = (-1, 0, 0) + [(6, -2, 1)]$ .

- (i) Proveu que les rectes  $r_1$  i  $r_2$  es creuen.
- (ii) Determineu la distància entre elles.
- (iii) Doneu l'equació de la recta que conté la mínima distància, és a dir, la recta que és perpendicular a  $r_1$  i  $r_2$ , i que les talla.
- (iv) Trobeu els punts  $P_j \in r_j$ ,  $j = 1, 2$ , donant la mínima distància.

$Q_1 = (0, -2, 0)$ ,  $v_1 = (3, 1, 1)$ ,  $Q_2 = (-1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (6, -2, 1)$ .

- (i) •  $v_1 \nparallel v_2 \implies r_1 \nparallel r_2$ .  
• Per veure  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ , les expressem en forma paramètrica:  
 $r_1 : (x, y, z) = (0, -2, 0) + \lambda(3, 1, 1) = (3\lambda, -2 + \lambda, \lambda)$   
 $r_2 : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + \mu(6, -2, 1) = (-1 + 6\mu, -2\mu, \mu)$ .  
Si  $(x, y, z) \in r_1 \cap r_2$  (punt de tall), llavors  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tals que:

$$\text{(a)} \quad 3\lambda = -1 + 6\mu, \quad \text{(b)} \quad -2 + \lambda = -2\mu, \quad \text{(c)} \quad \lambda = \mu.$$

**(b), (c)**  $\implies \lambda = \mu = 2/3$  que no verifiquen **(a)**  $\implies$  sistema incompatible (no hi ha punts de tall) i  $r_1, r_2$  es creuen.

- (iii) Volem calcular  $r$  perpendicular comú a  $r_1$  i  $r_2$ . Expressem  $r$  com intersecció  $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$  de dos plans tals que  $\Pi_j$  conté  $r_j$  i, a més, té com a vector director el  $\perp$  comú  $v = (1, 1, -4)$ :

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 3, -12) = 3v. \quad (\text{Treiem el 3.})$$

•  $\Pi_1 = Q_1 + [v_1, v] = (0, -2, 0) + [(3, 1, 1), (1, 1, -4)]$ .

$v_1 \wedge v = (-5, 13, 2) \implies \Pi_1 = \{-5x + 13y + 2z = d\}$ , on  $d$  el triem tal que  $Q_1 \in \Pi_1$ :  $d = -5 \cdot 0 + 13 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -26$ .

•  $\Pi_2 = Q_2 + [v_2, v] = (-1, 0, 0) + [(6, -2, 1), (1, 1, -4)]$ .

$v_2 \wedge v = (7, 25, 8) \implies \Pi_2 = \{7x + 25y + 8z = d\}$ , on  $d$  el triem tal que  $Q_2 \in \Pi_2$ :  $d = 7 \cdot (-1) + 25 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = -7$ .

• Així:  $r = \{-5x + 13y + 2z = -26, 7x + 25y + 8z = -7\}$ .

- (iv) Els punts  $P_1 \in r_1$ ,  $P_2 \in r_2$  que donen la mínima distància entre  $r_1$ ,  $r_2$  els trobem tallant  $r_1$  amb  $\Pi_2$  i  $r_2$  amb  $\Pi_1$ .

•  $P_1 = r_1 \cap \Pi_2 \implies P_1 = (x, y, z) = (3\lambda, -2 + \lambda, \lambda) \in r_1$ , on  $\lambda$  el triem per tal que  $P_1 \in \Pi_2$ :

$$7 \cdot 3\lambda + 25 \cdot (-2 + \lambda) + 8 \cdot \lambda = -7 \implies 54\lambda = 43 \implies \lambda = \frac{43}{54}.$$

Per tant:  $P_1 = (129/54, -65/54, 43/54)$ .

(iv) (continuació)

•  $P_2 = r_2 \cap \Pi_1 \implies P_2 = (x, y, z) = (-1 + 6\mu, -2\mu, \mu) \in r_2$ ,  
on  $\mu$  el triem per tal que  $P_2 \in \Pi_1$ :

$$-5 \cdot (-1 + 6\mu) + 13(-2\mu) + 2 \cdot \mu = -26 \implies \mu = \frac{31}{54}.$$

Per tant:  $P_2 = (132/54, -62/54, 31/54)$ .

(ii) Podem calcular la distància entre  $r_1, r_2$  a partir de:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = P_2 - P_1 = \frac{1}{54}(3, 3, -12) = \frac{1}{18}(1, 1, -4).$$

Obtenim:

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \left\| \frac{1}{18}(1, 1, -4) \right\| = \frac{\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

També podem fer el càlcul de la distància directament, sense usar  $P_1, P_2$ , amb la fórmula que veurem tot seguit. Com que  $r_1 = Q_1 + [v_1]$ ,  $r_2 = Q_2 + [v_2]$  no són rectes paral·leles:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{Q_1 Q_2}, v_1 \wedge v_2 \rangle|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{|\langle (-1, 2, 0), (3, 3, -12) \rangle|}{\|(3, 3, -12)\|} = \frac{|3|}{3\sqrt{18}},$$

on usem  $\|(3, 3, -12)\| = 3\|(1, 1, -4)\| = 3\sqrt{18}$ .

## Fórmules per calcular distàncies des d'un punt

- ▶ A  $\mathbb{R}^2$ : punt  $P = (x_0, y_0)$ , recta  $r = \{ax + by = c\}$ :

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- ▶ A  $\mathbb{R}^3$ : punt  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , pla  $\Pi = \{ax + by + cz = d\}$ :

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- ▶ A  $\mathbb{R}^3$ : punt  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , recta  $l = Q + [v]$

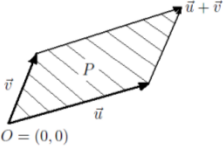
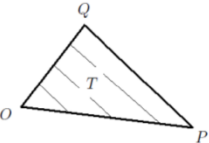
$$d(P, l) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \wedge v\|}{\|v\|}.$$

- ▶ A  $\mathbb{R}^3$ : Recta  $l_1 = P_1 + [v_1]$ , recta  $l_2 = P_2 + [v_2]$ . Si  $l_1 \nparallel l_2$ :

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1 P_2}, v_1 \wedge v_2 \rangle|}{\|v_1 \wedge v_2\|}.$$

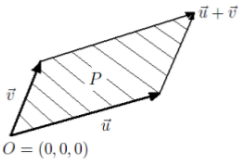
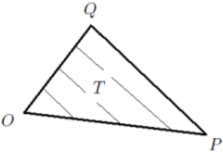
Fórmules vàlides en ref. canònica o qualsevol ref. ortonormal.

## Àrees de polígons a $\mathbb{R}^2$

Polígons a $\mathbb{R}^2$	Àrea
	Paral·lelogram: $ det(\vec{u}, \vec{v}) $
	Triangle: $\frac{1}{2} det(\vec{OP}, \vec{OQ}) $

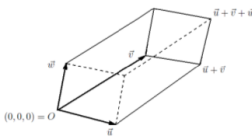
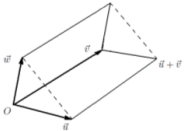
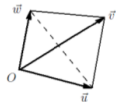
Altres polígons: descomposeu-los en triangles i sumar àrees.

## Àrees de polígons a $\mathbb{R}^3$

Polígons a $\mathbb{R}^3$	Àrea
 <p data-bbox="192 455 315 486"><math>O = (0, 0, 0)</math></p>	Paral·lelogram: $\ \vec{u} \times \vec{v}\ $
	Triangle: $\frac{1}{2} \ \vec{OP} \times \vec{OQ}\ $

Recordeu:  $\times = \wedge$  és el producte vectorial.

# Volums de poliedres a $\mathbb{R}^3$

Poliedre a $\mathbb{R}^3$	Volum
	Paral·lelepíped: $ \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) $
	Prisma triangular: $\frac{1}{2} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) $
	Tetraèdre (piràmide triangular): $\frac{1}{6} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) $

## Problema 17

D'entre els triangles que ténen vèrtexs  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (2, 2, 0)$  i  $C$  en la recta  $l : \{x + y = 5, z = 1\}$ .

1. Trobeu els que tenen àrea  $\sqrt{3}$ .
2. Busqueu el que tingui àrea mínima.

1.  $C$  és de la forma  $C = (5, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) = (5 - \lambda, \lambda, 1)$ , per un cert  $\lambda \in \mathbb{R}$  (expressant  $l$  en forma paramètrica). L'àrea  $\mathcal{A}$  del triangle de vèrtexs  $A, B, C$  és la meitat de l'àrea del paral·lelogram generat per  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 0)$  i  $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (4 - \lambda, \lambda - 1, 1)$ . Per tant:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{1}{2} \|(1, -1, 2\lambda - 5)\| = \frac{1}{2} \sqrt{2 + (2\lambda - 5)^2}.$$

Cal:

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 + (2\lambda - 5)^2} = \sqrt{3} \iff (2\lambda - 5)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 10$$

$$\iff 2\lambda - 5 = \pm\sqrt{10} \iff \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{2}. \text{ Tenim doncs dos}$$

$$\text{solucions: } C = \left(\frac{5+\sqrt{10}}{2}, \frac{5-\sqrt{10}}{2}, 1\right) \text{ i } C = \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2}, \frac{5+\sqrt{10}}{2}, 1\right).$$

## Problema 17 (continuació)

2. Busquem els triangles que tenen àrea mínima entre tots els que tenen el vèrtex  $C$  sobre la recta  $l$ . Hem de minimitzar doncs la funció de  $\lambda$  definida per  $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + (2\lambda - 5)^2}$ . Equival a minimitzar la funció definida per  $a(\lambda) = (2\lambda - 5)^2$ .  $a(\lambda)$  és una paràbola que té el seu vèrtex en  $\lambda = 5/2$ , que dóna el seu mínim absolut per a tot  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Per tant, obtenim:  $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ .

## Definició (Base ortonormal)

Sigui  $F \subset \mathbb{R}^n$  un sub-espai vectorial de dimensió  $d$ . Direm que  $\{v_1, \dots, v_d\}$  és una base ortonormal (b.o.n.) de  $F$  si:

- ▶  $F = [v_1, \dots, v_d]$  (formen una base).
- ▶  $v_1, \dots, v_d$  són ortogonals 2 a 2:  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ , si  $i \neq j$ .
- ▶  $v_1, \dots, v_d$  són unitaris:  $\|v_i\| = 1$  per  $i = 1, 2, \dots, d$ .

**Observació:** Quan s'han de fer càlculs que involucren productes escalars, però volem un sistema de coordenades més adaptat al problema que no pas les canòniques, el natural és que els canvis de base vinguin donats per b.o.n.'s. Per exemple:

## Teorema (Projecció amb bases ortonormals)

*Si  $u_1, \dots, u_d$  base ortonormal de  $F$ , la projecció d'un vector  $v$  és:*

$$\Pi_F(v) = \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle v, u_2 \rangle \cdot u_2 + \dots + \langle v, u_d \rangle \cdot u_d.$$

## Definició (Matriu ortogonal)

Una matriu  $M \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  és ortogonal sí.  $M^T M = Id_n \iff$  els  $n$  vectors definits per les fileres (o per les columnes) de la matriu  $M$  formen una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

### • Propietats de les matrius ortogonals:

- ▶  $\det M = \pm 1$ .
- ▶ La inversa és de  $M$  és la seva transposta:  $M^{-1} = M^T$ .
- ▶ La matriu de canvi de base entre dues b.o.n. és sempre una matriu ortogonal i tota matriu ortogonal defineix un canvi de base entre dues b.o.n.
- ▶  $\langle M u, M v \rangle = \langle u, v \rangle$  i  $\|M u\| = \|u\|$ ,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ .  
(Això és, aplicar la matriu  $M$  a una parella de vectors preserva el valor del seu producte escalar i de la seva norma euclidiana.)

## Definició (Referències ortonormals)

Una referència afí  $\mathbf{u} = \{P; u_1, \dots, u_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  és diu que és ortonormal si  $u_1, \dots, u_n$  és una b.o.n. de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $\mathbf{u} = \{P; u_1, \dots, u_n\}$  és ortonormal i  $\mathbf{e} = \{O; e_1, \dots, e_n\}$  és la ref. canònica de  $\mathbb{R}^n$ , llavors la matriu de canvi de referència

$$A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} & & (P)\mathbf{e} \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right),$$

ve donada per matriu de canvi de base  $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$  ortogonal. Així:

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = (A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}})^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & (M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}})^{\top} & & -(M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}})^{\top} (P)\mathbf{e} \\ & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

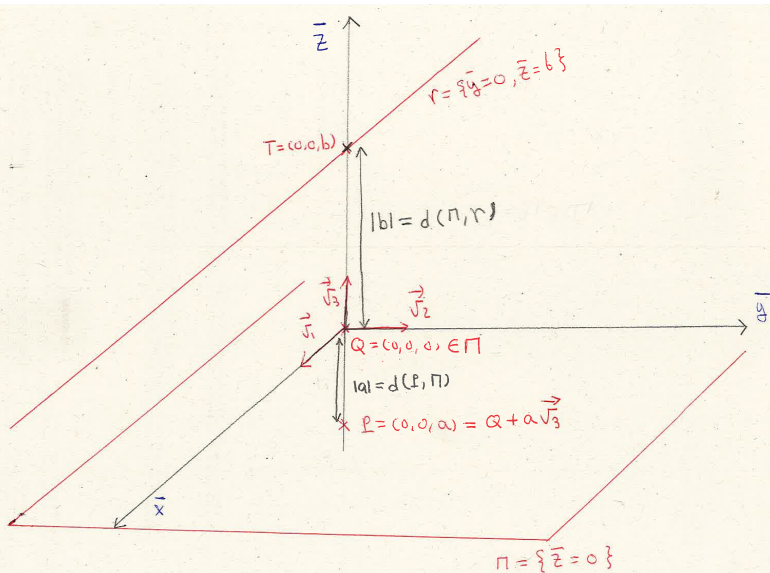
## Problema 24 (I)

$P = (2, 2, 0)$ ,  $r = \{x + y = 0, y + z = 0\}$  i  $\pi = \{x + y = 3\}$ , expressats en la referència canònica  $\mathbf{e} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Cerqueu un sistema de referència ortonormal  $\mathbf{R} = \{Q; v_1, v_2, v_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  en el qual les coordenades del punt  $P$  són  $(0, 0, a)$  i les equacions de  $r$  i  $\pi$  són  $r = \{\bar{y} = 0, \bar{z} = b\}$  i  $\pi = \{\bar{z} = 0\}$ . Quins valors tenen les constants  $a$  i  $b$ ? ( $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  coord. en ref.  $\mathbf{R}$ .)

- **Recordem:** Els canvis de coordenades envien espais directors a espais directors. A més, si les referències són ortonormals, els mòduls es mantenen i l'ortogonalitat també.
  - ▶ Com que  $\Pi$  és  $\bar{z} = 0$  en ref.  $\mathbf{R}$ , això vol dir que  $v_3$  (que dona la direcció de  $\bar{z}$ ) és  $v_3 \perp \pi$ . Per tant, si l'expressem en ref.  $\mathbf{e}$ ,  $v_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$  (definit pels coeficients de  $\pi$  i normalitzat).
  - ▶ En ref.  $\mathbf{e}$ , el s.e.v. director de  $r$  és  $[(1, -1, 1)]$  (vector solució de les equacions homogenitzades de  $r$ ). Com que en ref.  $\mathbf{R}$  el s.e.v. director de  $r$  és  $[v_1]$ , aleshores  $v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ .

# Problema 24 (II)



## Problema 24 (III)

- ▶ És clar que  $r \parallel \pi$ . És obvi via les equacions en ref. **R**. També en ref. **e**, ja que  $v_1$  (director de  $r$ ) és  $\perp$  a  $v_3$  (que és  $\perp$  a  $\pi$ ).
- ▶ El vector  $v_2$  ha de ser  $\perp v_1, v_3$  i unitari. Si l'expresssem en ref. **e**, ha de ser  $v_2 = \pm v_1 \wedge v_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)$ .
- ▶ El fet de que poguem triar com volguem els signes de  $a$  i  $b$  ens permet triar lliurement els signes de  $v_1, v_2, v_3$ . Triem doncs:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2), \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

(Si volguéssim signes concrets per  $a, b$  cal vigilar el de  $v_3$ .)

- ▶ Usant  $r \parallel \pi$ , les equacions en ref. **R** diuen que  $|b| = d(r, \pi)$ . Així,  $|b| = d(S, \pi)$ , on  $S \in r$  és qualsevol punt de  $r$ . Usem que, en ref. **e**,  $S = (0, 0, 0) \in r$ :

$$|b| = d((0, 0, 0), \Pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

on hem escrit  $\pi = \{1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z - 3 = 0\}$  en ref. **e**.

## Problema 24 (IV)

- ▶ És clar que en ref. **R** és té  $|a| = d(P, \Pi)$ . Per tant, fent els calculs en ref. **e**:

$$|a| = d(P, \Pi) = d((2, 2, 0), \Pi) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- ▶  $(P)_{\mathbf{R}} = (0, 0, a)$ ,  $(Q)_{\mathbf{R}} = (0, 0, 0)$  i  $(v_3)_{\{v_i\}} = (0, 0, 1)$ , ens diuen que  $P = Q + a v_3$  en ref. **R**. En ref. **e**, això ens diu:

$$Q = P - a v_3 = (2, 2, 0) - \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \begin{cases} (3/2, 3/2, 0) \\ (5/2, 5/2, 0) \end{cases}$$

En ref. **R**, tenim  $Q \in \pi = \{\bar{z} = 0\}$ . Com  $\pi = \{x + y = 3\}$ , en ref. **e**, ha de ser  $Q = (3/2, 3/3, 0)$  i  $a = 1/\sqrt{2}$ .

- ▶ Així doncs, el canvi de coordenades en **R** a **e** és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}}_{M_{\{v_i\} \rightarrow \{e_i\}}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

## Problema 24 (V)

► Per trobar el valor correcte de  $b$  tenim dos opcions:

- (i) Transformar les equacions de  $r$  pel canvi  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{e}$ .
- (ii) Transformar només un punt  $T \in r$ .

(ii) Triem, per exemple, el punt  $T \in r = \{\bar{y} = 0, \bar{z} = b\}$  que en ref.  $\mathbf{R}$  té coordenades  $(T)_{\mathbf{R}} = (0, 0, b)$ . En ref.  $\mathbf{e}$  té coord.  $(T)_{\mathbf{e}} = (3/2 + b/\sqrt{2}, 3/2 + b/\sqrt{2}, 0)$ . Si volem que  $(T)_{\mathbf{e}}$  verifiqui les equacions  $r = \{x + y = 0, y + z = 0\}$ , llavors cal  $3/2 + b/\sqrt{2} = 0 \implies b/\sqrt{2} = -3/2 \implies b = -3\sqrt{2}/2$ .

(i) Transformem les equacions de  $r$  pel canvi expressant-la en ref.  $\mathbf{e}$  com  $(M^{\mathbf{e}} | -b^{\mathbf{e}}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on  $(M^{\mathbf{e}} | -b^{\mathbf{e}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Per obtenir  $r$  en ref.  $\mathbf{R}$  calculem  $(M^{\mathbf{R}} | -b^{\mathbf{R}}) = (M^{\mathbf{e}} | -b^{\mathbf{e}}) A_{\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{e}}$ :

$$(M^{\mathbf{R}} | -b^{\mathbf{R}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$r \text{ en ref. } \mathbf{R} \text{ és } (M^{\mathbf{R}} | -b^{\mathbf{R}}) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}}\bar{z} + 3 = 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{6}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{z} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

## Mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt

$F \subset \mathbb{R}^n$  s.e.v. de dimensió  $d$ . Gram-Schmidt permet calcular una b.o.n.  $\{w_1, \dots, w_d\}$  de  $F$  seguint els següents passos:

(I)  $F = [u_1, \dots, u_d]$  base qualsevol de  $F$ .

(II) Primer calculem  $F = [v_1, \dots, v_d]$  base ortogonal de  $F$ . Fem:

(1)  $v_1 = u_1$ .

(2)  $v_2 = \lambda_1 v_1 + u_2$ , on  $\lambda_1 = -\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$  fa que  $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ .

(2)  $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + u_3$ , on  $\lambda_1 = -\frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$  i  $\lambda_2 = -\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}$   
fan que  $\langle v_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 0$ .

(3) etcètera.

(d)  $v_d = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{d-1} v_{d-1} + u_d$ , on:  $\lambda_j = -\frac{\langle u_d, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$ , per  
 $j = 1, \dots, d$ , fan que  $\langle v_d, v_1 \rangle = \dots = \langle v_d, v_{d-1} \rangle = 0$ .

(III) Normalitzem la base  $v_1, \dots, v_d$  per obtenir una b.o.n. de  $F$ :

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \quad \dots, \quad w_d = \frac{v_d}{\|v_d\|}.$$

## Exemple

$F \subset \mathbb{R}^3$  el s.e.v. d'equació  $x - 3y + z = 0$ . Trobeu una b.o.n. de  $F$  i amplieu-la per obtenir una b.o.n. de  $\mathbb{R}^3$ . Calculeu  $\Pi_F(1, 1, 2)$ .

Apliquem Gram-Schmidt per obtenir  $w_1, w_2$  b.o.n. de  $F$ :

(I) L'equació en dóna la base  $F = [u_1, u_2] = [(-1, 0, 1), (3, 1, 0)]:$

$$y = 0, z = 1 \implies x = -1 \implies u_1 = (x, y, z) = (-1, 0, 1).$$

$$y = 1, z = 0 \implies x = 3 \implies u_2 = (x, y, z) = (3, 1, 0).$$

(II) Calculem  $F = [v_1, v_2]$  base ortogonal de  $F$ :

(1)  $v_1 = u_1 = (-1, 0, 1)$ .

(2)  $v_2 = \lambda_1 v_1 + u_2 = \frac{3}{2}(-1, 0, 1) + (3, 1, 0) = \frac{(3, 2, 3)}{2}$ , on:

$$\lambda_1 = -\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -\frac{\langle (3, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle}{\langle (-1, 0, 1), (-1, 0, 1) \rangle} = \frac{3}{2}.$$

(III) Normalitzem la base  $v_1, v_2$  per obtenir  $w_1, w_2$ :

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}}.$$

Per tant,  $F = [w_1, w_2] = \left[ \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}} \right]$  b.o.n. de  $F$ .

Volem ampliar  $F = [w_1, w_2]$  a una b.o.n.  $\mathbb{R}^3 = [w_1, w_2, w_3]$ . Per fer-ho, considerem una base  $\mathbb{R}^3 = [u_1, u_2, u_3]$ , on  $u_1 = (-1, 0, 1)$  i  $u_2 = (3, 1, 0)$  són els d'abans. És natural triar  $u_3 \perp u_1, u_2$  i el més directe és triar  $u_3 = (1, -3, 1)$  via els coeficients de  $x, y, z$  en l'equació de  $F$ . Si apliquem Gram-Schmidt per ortogonalitzar la base  $\mathbb{R}^3 = [u_1, u_2, u_3]$ , els dos primers vectors  $v_1, v_2$  que obtindrem són els mateixos  $v_1 = (-1, 0, 1)$  i  $v_2 = \frac{(3, 2, 3)}{2}$  que abans. En ser  $u_3 \perp u_1, u_2$ , també és cert  $u_3 \perp v_1, v_2$ , d'on clarament  $v_3 = u_3$ . Si no ho veiem clar i fem els calculs usant Gram-Schmidt:

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + u_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + (1, -3, 1) = (1, -3, 1),$$

on:  $\lambda_1 = -\frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = -\frac{\langle (1, -3, 1), (-1, 0, 1) \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = 0$ . Anàlogament,

$$\lambda_2 = -\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = 0. \text{ Finalment, la b.o.n. de } \mathbb{R}^3 = [w_1, w_2, w_3] \text{ és:}$$

$$w_1 = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \quad w_2 = \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}}, \quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(1, -3, 1)}{\sqrt{11}}.$$

Considerem ara  $v = (1, 1, 2)$  i calculem  $\Pi_F(v)$  usant la b.o.n.

$$F = [w_1, w_2] = \left[ \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}} \right]. \text{ Concretament:}$$

$$\begin{aligned} \Pi_F(v) &= \langle v, w_1 \rangle \cdot w_1 + \langle v, w_2 \rangle \cdot w_2 \\ &= \left\langle (1, 1, 2), \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} \\ &\quad + \left\langle (1, 1, 2), \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}} \right\rangle \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} + \frac{11}{\sqrt{22}} \frac{(3, 2, 3)}{\sqrt{22}} \\ &= \frac{1}{2}(-1, 0, 1) + \frac{11}{22}(3, 2, 3) = (1, 1, 2). \end{aligned}$$

La raó de que  $\Pi_F(v) = v$  és que  $V \in F$  ja que, de fet,  $v$  compleix l'equació  $x - 3y + z = 0$  de  $F$ .

## Definició (Formes quadràtiques)

Una forma quadràtica  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és un polinomi homogeni de grau 2 en  $n$  variables.

## Teorema (Formes quadràtiques $\approx$ matrius simètriques)

Hi ha una correspondència natural entre les formes quadràtiques de  $\mathbb{R}^n$  i les matrius simètriques  $n \times n$ . Concretament, tota forma quadràtica  $q$  de  $\mathbb{R}^n$  la podem expressar de la forma:

$$q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

on  $S \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  és una matriu simètrica:  $S^T = S$ .

## Exemple 1. Forma quadràtica en $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + 4xy + 2xz + 3y^2 + 10yz + 4z^2 \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Definició

La matriu  $S = \text{Mat}_u(q)$  d'una forma quadràtica  $q$  en base  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  és la matriu simètrica  $S$  que compleix

$$q(v) = (v)_{\{u_i\}}^\top S (v)_{\{u_i\}},$$

on  $(v)_{\{u_i\}}$  (vector columna) components del vector  $v$  en base  $\{u_i\}$ .

## Exemple 1

Per  $q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 3y^2 + 10yz + 4z^2$ , tenim

$$\text{Mat}_e(q) = S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \text{ on } e = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base canònica.}$$

(Els elements de la diagonal de  $q$  són els coeficients de  $x^2, y^2, z^2$  de  $q$ ; els de fora la diagonal són el reste de coeficients dividits per 2.)

## Canvis de base en formes quadràtiques

Sigui  $q$  una forma quadràtica i  $S = \text{Mat}_e(q)$  matriu (simètrica) de  $q$  en una base  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  donada (típicament la canònica).

La matriu de  $q$  en una altre base  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  és:

$$\text{Mat}_u(q) = P^\top S P,$$

on  $P = M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$  és la corresponent matriu de canvi de base.

( $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$  té per columnes les components dels vectors  $u_1, \dots, u_n$  expressats en base  $e_1, \dots, e_n$ .)

- ▶ Canvi de base en formes quadràtiques diferent a canvi de base en la matriu d'una aplicació lineal (no cal invertir  $P$ ).
- ▶ **Reduir**  $q$  vol dir aplicar un canvi de base tal que  $D = P^\top S P$  sigui diagonal  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Si  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  són les components en base  $u$ , llavors  $q$  s'expressa com:

$$q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = d_1 \bar{x}_1^2 + \dots + d_n \bar{x}_n^2.$$

- ▶ La forma reduïda de  $q$  **NO** és única. Només ho són el nombre d'elements positius/negatius/zero en la diagonal de  $D$ , però no el seu valor concret.

# Reducció de la matriu d'una forma quadràtica a matriu diagonal

$S$  matriu simètrica d'una forma quadràtica  $q$ .

**Opció 1 (Mètode Pràctic.)** Aplicar transformacions elementals (mètode del pivot / eliminació gaussiana) a la matriu  $S$ :

1. Les transformacions s'apliquen primer per files  $i$ , tot seguit, s'apliquen exactament les mateixes transformacions per columnes (mantenint el caràcter simètric). El procés es fa fins que  $S$  esdevé la matriu  $D$  diagonal d'una forma reduïda de  $q$ .
2. **(Només si volem també el canvi de base.)** Si apliquem les transformacions elementals que hem fet en 1., però **només per files**, a la matriu identitat  $\text{Id}_n$ , llavors la matriu  $\text{Id}_n$  esdevé la matriu  $P^\top$  del canvi de base que dóna lloc a la forma reduïda  $D$ . Això és,  $D = P^\top S P$ .

**Opció 2 (Només si volem un canvi de base ortonormal.)** El canvi de base donat per la matriu  $P$  de **Opció 1 NO** és ortonormal. Si volem que la nova base sigui una b.o.n. (això és, que  $P$  sigui una matriu ortogonal  $P^\top = P^{-1}$ ), llavors cal aplicar el **Teorema Espectral**: calcular els VAPs i VEPs de  $S$  i diagonalitzar la matriu amb un canvi de base ortonormal.

## Exemple 1

Trobeu la forma reduïda i un canvi de base que la redueix per la forma quadràtica  $q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 3y^2 + 10yz + 4z^2$ .

Primer reduïm la matriu  $S$  de  $q$ , sense buscar cap canvi de base:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \underset{\text{Pas 3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = D,$$

on hem fet ( $f$  vol dir operació per fila i  $c$  per columna):

- ▶ **Pas 1.**  $f_2 = f_2 - 2f_1$ ,  $f_3 = f_3 - f_1$ .
- ▶ **Pas 2.**  $c_2 = c_2 - 2c_1$ ,  $c_3 = c_3 - c_1$ .
- ▶ **Pas 3.**  $f_3 = f_3 + 3f_2$ .
- ▶ **Pas 4.**  $c_3 = c_3 + 3c_2$ .

$D$  és la matriu reduïda i, en les noves coordenades  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ :

$$q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 12\bar{z}^2.$$

## Exemple 1 (continuació)

Per trobar la base en que  $q$  redueix, ampliem la matriu  $S$  de  $q$  amb  $\text{Id}_3$  a la dreta. En el costat dret només fem operacions per files.

$$\begin{aligned}(S | \text{Id}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{\text{Pas 1}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Pas 2}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{\text{Pas 3}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Pas 4}}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right) = (D | P^\top) \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

on **Pas 1** =  $\{f_2 = f_2 - 2f_1, f_3 = f_3 - f_1\}$ , **Pas 3** =  $\{f_3 = f_3 + 3f_2\}$ , i **Pas 2**, **Pas 4** els simètrics per columnes. Per tant, una base en la qual  $q$  assoleix la seva forma reduïda ve donada per les columnes de  $P$  (o files de  $P^\top$ ):  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (-2, 1, 0)$ ,  $u_3 = (-7, 3, 1)$ .

## Exemple 1 (fi)

Fem un resum de tot plegat. Donada la forma quadràtica

$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 3y^2 + 10yz + 4z^2$ , que en base

canònica té matriu  $S = \text{Mat}_e(q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ , hem obtingut

la forma reduïda donada per  $D = \text{Mat}_u(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ .

La base en que s'assoleix la forma reduïda  $D$  la podem triar com

$u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (-2, 1, 0)$ ,  $u_3 = (-7, 3, 1)$ . Si  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  són les

components d'un vector en aquesta base, llavors  $q$  pren la forma

$q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 12\bar{z}^2$ . Si  $P$  és la matriu que té per columnes

els vectors  $u_1, u_2, u_3$ , això és,  $P = M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

llavors es compleix que  $D = P^T S P$ .

# Reducció usant el teorema espectral

## Teorema (Teorema espectral)

*Tota matriu simètrica  $S$  diagonalitza amb tots els VAPs reals  $\lambda_i$ , a més, amb una base de VEPs que podem triar ortonormal.*

Més concretament el teorema ens diu: si  $S \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  és simètrica,  $S^\top = S$ , aleshores existeix una matriu diagonal  $D \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  i una matriu ortogonal  $P \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , amb  $P^\top P = \text{Id}_n$ , que compleixen:

$$D = P^{-1} S P = P^\top S P,$$

on usem que  $P^\top P = \text{Id}_n \implies P^{-1} = P^\top$ . En conseqüència, els vectors  $u_1, \dots, u_n$  definits per les columnes de la matriu  $P$  formen una b.o.n. de VEPs de  $S$ , amb VAPs donats pels elements de la diagonal de  $D$ . A més, si  $S = \text{Mat}_e(q)$  és la matriu d'una forma quadràtica  $q$  (en base canònica) i fem el canvi de base definit per la matriu (ortogonal)  $P$ , obtenim que  $D = \text{Mat}_u(q)$  és la forma reduïda de  $S$  en la base ortonormal  $u_1, \dots, u_n$ .

## Classificació de formes quadràtiques

Sigui  $D$  la matriu diagonal que ens dóna la forma reduïda d'una forma quadràtica  $q$ . La matriu  $D$  no és única, però els signes dels seus elements sí que estan determinats per  $q$ . Podem classificar formes quadràtiques atenent als valors d'aquests signes.

### Definició (índexs d'inèrcia i llei d'inèrcia de Sylvester)

Els índexs d'inèrcia (o tipus  $(i_+, i_-, i_0)$ ) d'una forma quadràtica  $q$ , amb matriu associada donada per  $S = \text{Mat}_e(q)$ , són:

$i_+ \equiv$  nombre de termes estrictament positius en la diagonal d'una forma reduïda  $D$  de  $q$

$\equiv$  nombre de VAPs  $> 0$  de  $S$  comptats amb multiplicitat.

$i_- \equiv$  nombre de termes estrictament negatius en la diagonal de  $D$

$\equiv$  nombre de VAPs  $< 0$  de  $S$  comptats amb multiplicitat.

$i_0 \equiv$  nombre de termes nuls en la diagonal de  $D$

$\equiv$  multiplicitat del VAP 0 de  $S$ .

Així doncs, classificar  $q$  vol dir trobar els seus índexs d'inèrcia a partir dels signes dels VAPs d'una forma reduïda qualsevol de  $q$ .

## Definició (Casos particulars del teorema de classificació)

$S$  matriu simètrica d'una forma quadràtica  $q$  de  $\mathbb{R}^n$  en una base qualsevol. Aleshores, introduïm la següent terminologia per  $q$  que s'extén també a la matriu  $S$ :

- ▶  $q$  definida positiva  $\iff q(x) > 0$  en tot  $x \in \mathbb{R}^n$  amb  $x \neq 0$   
 $\iff i_+ = n, i_- = 0, i_0 = 0 \iff$  Tots els VAPs de  $S$  són positius.
- ▶  $q$  definida negativa  $\iff q(x) < 0$  en tot  $x \in \mathbb{R}^n$  amb  $x \neq 0$   
 $\iff i_+ = 0, i_- = n, i_0 = 0 \iff$  Tots els VAPs de  $S$  són negatius.
- ▶  $q$  no degenerada  $\iff q(x) \neq 0$  en tot  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \neq 0$ .

Si només volem saber si  $q$  és definida positiva o negativa, podem usar el **Criteri de Sylvester**: Siguin  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  els valors dels menors principals de  $S$ . Aleshores:

- ▶  $q$  és definida positiva  $\iff \delta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$ .
- ▶  $q$  definida negativa  $\iff (-1)^i \delta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$   
 $\iff \delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \dots$

## Problema 34(a)

Per a quins valors de  $\alpha$  és definida positiva  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ .

Els menors principals de  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  són els determinants:

$$\delta_1 = a, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Per tant, per la nostra matriu es té  $\delta_1 = 1$ , i:

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2.$$

És fàcil veure que  $\delta_3 = 0$  si  $\alpha = 1$ . Aplicant Ruffini:

$$\delta_3 = (\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1) = (\alpha - 1)^2(2\alpha + 1).$$

A definida positiva  $\iff \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$ . Equival a dir:

$$\alpha^2 < 1, \alpha - 1 \neq 0, 2\alpha + 1 > 0 \iff \alpha \in (-1, 1), \alpha > -1/2.$$

Finalment doncs, A definida positiva  $\iff \alpha \in (-1/2, 1)$ .

## Definició (Restricció forma quadràtica a sub-espai vectorial)

$S = \text{Mat}_e(q)$  matriu d'una forma quadràtica  $q$  de  $\mathbb{R}^n$  (en base canònica) i  $F \subset \mathbb{R}^n$  un sub-espai vectorial de dimensió  $d$  generat per  $F = [u_1, \dots, u_d]$ . Aleshores, la matriu de la forma quadràtica  $q|_F$  definida per la restricció de  $q$  al s.e.v.  $F$ , usant la base  $u = \{u_1, \dots, u_d\}$ , és:

$$\text{Mat}_u(q|_F) = P^T S P,$$

on  $P \in \mathbb{M}_{n,d}(\mathbb{R})$  matriu que té per columnes les components dels vectors  $u_1, \dots, u_d$  en base canònica.

## Proposició

- ▶ *Si  $q$  té índexs d'inèrcia  $(i_+, i_-, i_0)$ , aleshores existeixen s.e.v.'s  $F_+, F_-$ , de dimensions  $i_+, i_-$ , tals que  $q|_{F_+}$  és definida positiva i  $q|_{F_-}$  definida negativa.*
- ▶ *Si  $q$  és definida positiva/negativa, llavors la seva restricció  $q|_F$  sempre és definida positiva/negativa.*

### Problema 32(iii)

Considereu la forma quadràtica  $q(x, y, z, t) = 2x t + 6y z$ .

1. Trobeu una forma reduïda de  $q$  i una base en que redueix. Classifiqueu-la. Digueu si és definida positiva, negativa o indefinida.
2. Trobeu sub-espais vectorials  $F_+$  i  $F_-$  de  $\mathbb{R}^4$ , de dimensions el més grans possibles, tals que les restriccions  $q|_{F_+}$  i  $q|_{F_-}$  siguin definida positiva i definida negativa, respectivament.

Apliquem pivotatge a la matriu  $S = \text{Mat}_e(q)$  "ampliada":

$$\underbrace{\left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{(S | \text{Id}_3)} \sim \underbrace{\left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)}_{(D | P^T)}.$$

La forma reduïda és  $q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = 2\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - \frac{3}{2}\bar{z}^2 - \frac{1}{2}\bar{t}^2$ , que té  $i_+ = 2$ ,  $i_- = 2$ ,  $i_0 = 0$  i per tant és indefinida.

$$\begin{aligned}
(S | \text{Id}_3) &= \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{Pas 1}}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\underset{\text{Pas 2}}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \underset{\text{Pas 3}}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\
&\underset{\text{Pas 4}}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) = (D | P^\top), \quad \text{on:}
\end{aligned}$$

**Pas 1.**  $f_1 = f_1 + f_4$ ,  $c_1 = c_1 + c_4$ , **Pas 2.**  $f_4 = f_4 - \frac{1}{2}f_1$ ,  $c_4 = c_4 - \frac{1}{2}c_1$ ,  
**Pas 3.**  $f_2 = f_2 + f_3$ ,  $c_2 = c_2 + c_3$ , **Pas 4.**  $f_3 = f_3 - \frac{1}{2}f_2$ ,  $c_3 = c_3 - \frac{1}{2}c_2$ .

Per tant,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  i la base en la qual  $q$  assoleix

la seva forma reduïda ve donada pels vectors columna de  $P$ :

$u_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $u_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $u_4 = (-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ .

- ▶  $i_+ = 2 \implies$  La dimensió més gran del s.e.v.  $F_+$  tal que  $q|_{F_+}$  és definida positiva és 2. Com que els elements positius de la diagonal de  $D$  són els dos primers, podem triar  $F_+ = [u_1, u_2]$ .

Si  $P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  matriu que té per columnes  $u_1, u_2$ , la matriu de la restricció  $q|_{F_+}$  és  $S_+ = \text{Mat}_{\{u_1, u_2\}}(q|_{F_+}) = P_+^\top S P_+$ :

$$S_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donada pels dos primers elements de la diagonal de  $D$ .

- ▶  $i_- = 2 \implies \dim(F_-) = 2$  (màxima possible),  $F_- = [u_3, u_4]$ ,

$P_- = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ,  $S_- = \text{Mat}_{\{u_3, u_4\}}(q|_{F_-}) = P_-^\top S P_-$ :

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## Problema 37

$q_\alpha$  forma quadràtica de  $\mathbb{R}^4$  que té  $S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$  per

matriu associada (en base canònica).

1. Classifiqueu  $q_\alpha$  en funció de  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Per a quins  $\alpha$  és definida positiva/negativa?
2. Si  $q = q_\alpha$  per  $\alpha = 3/2$ , doneu  $F_+/F_-$  s.e.v. de dimensió màxima tal que  $q|_{F_+}/q|_{F_-}$  sigui definida positiva/negativa.

$$\begin{aligned} (S | \text{Id}_4) &= \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{\text{Pas 1}}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\stackrel{\text{Pas 2}}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) = (D_\alpha | P^\top), \end{aligned}$$

on **Pas 1** =  $\{f_3 = f_3 - f_1\}$  i **Pas 2** =  $\{f_3 = f_3 - f_2, f_4 = f_4 - f_2\}$ , més les operacions simètriques per columnes.

Per tant  $(S | \text{Id}_4) \sim (D_\alpha | P^\top)$ , on  $D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$  i

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Si } u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0, 0),$$

$u_3 = (-1, -1, 1, 0)$  i  $u_4 = (0, -1, 0, 1)$  són els vectors columna de  $P$  i  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  components en base  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , llavors:

$$q_\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (\alpha - 2)\bar{z}^2 + (\alpha - 1)\bar{t}^2,$$

és la forma reduïda de  $q_\alpha$ . Els seus índexs d'inèrcia són:

- ▶ **Cas  $\alpha > 2$ :**  $i_+ = 4, i_- = i_0 = 0 \implies$  definida positiva.
- ▶ **Cas  $\alpha = 2$ :**  $i_+ = 3, i_- = 0, i_0 = 1$ .
- ▶ **Cas  $1 < \alpha < 2$ :**  $i_+ = 3, i_- = 1, i_0 = 0$ .
- ▶ **Cas  $\alpha = 1$ :**  $i_+ = 2, i_- = 1, i_0 = 1$ .
- ▶ **Cas  $\alpha < 1$ :**  $i_+ = 2, i_- = 2, i_0 = 0$ .

$q_\alpha$  no és mai definida negativa.

La matriu reduïda  $D$  de  $q = q_{3/2}$  és  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies$

$i_+ = 3, i_- = 1$ . Per tant:

- ▶ La dimensió més gran del s.e.v.  $F_+$  de  $\mathbb{R}^4$  pel qual  $q|_{F_+}$  és definida positiva és  $i_+ = 3$ . Atenen als elements positius de la diagonal de  $D$ , una possible tria és  $F_+ = [u_1, u_2, u_4]$ . La matriu  $D_+$  de  $q|_{F_+}$  en aquesta base és  $D_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .
- ▶ La dimensió més gran del s.e.v.  $F_-$  de  $\mathbb{R}^4$  pel qual  $q|_{F_-}$  és definida negativa és  $i_- = 1$ . Atenen al element negatiu de la diagonal de  $D$ , una possible tria és  $F_- = [u_3]$ . La matriu  $D_-$  de  $q|_{F_-}$  en aquesta base és  $D_- = (-\frac{1}{2})$  (matriu  $1 \times 1$ ).

## Extrems relatius de funcions reals de $n$ variables

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funció derivable tant com calgui i  $P \in \mathbb{R}^n$  un punt. En tot el que segueix indicarem les derivades parcials respecte de les variables  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $f$  com a sub-índexs. Per exemple:

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_{x_1, x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

### Definició (Punt crític de $f$ )

$P$  és un punt crític de  $f \iff \nabla f(P) = (0, \dots, 0)$ , on  $\nabla f(P)$  és el vector gradient (vector de derivades parcials) de  $f$  en  $P$ :

$$\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), f_{x_2}(P), \dots, f_{x_n}(P)).$$

### **Teorema** (Condicció necessària d'extrem relatiu)

*Si  $f$  té un extrem relatiu en  $P \implies P$  ha de ser un punt crític de  $f$ .*

## Definició (Hessià de $f$ en $P$ )

El hessià o matriu hessiana de  $f$  en  $P$  és la matriu simètrica  $n \times n$  de les derivades segones de  $f$  en  $P$ :

$$H(f)_P = D^2f(P) = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1}(P) & f_{x_1, x_2}(P) & \cdots & f_{x_1, x_n}(P) \\ f_{x_1, x_2}(P) & f_{x_2, x_2}(P) & \cdots & f_{x_2, x_n}(P) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_1, x_n}(P) & f_{x_2, x_n}(P) & \cdots & f_{x_n, x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Com a matriu simètrica, el hessià indueix la forma quadràtica  $q(x) = x^\top D^2f(P)x$  (on  $x$  s'entén com un vector columna).

## Teorema (Condicció suficient d'extrem relatiu/local)

Si  $P$  és un punt crític de  $f$ , llavors:

- ▶  $D^2f(P)$  definida positiva  $\implies f$  té mínim local a  $P$ .
- ▶  $D^2f(P)$  definida negativa  $\implies f$  té màxim local a  $P$ .
- ▶  $D^2f(P)$  té índexs d'inèrcia  $i_+ > 0$ ,  $i_- > 0 \implies f$  té un punt de sella a  $P$  (ni màxim ni mínim relatiu).

## Exemple

Trobeu tots els punts crítics de la funció i useu el criteri del hessià per classificar-los (màxim/mínim relatiu o punt de sella):

$$f(x, y, z) = \sin(x - 1)(y + 2) + (y + 2)z - \sin(x - 1)z.$$

$P = (x, y, z)$  punt crític de  $f \iff f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0$ :

$$(eq_1) \quad f_x = \cos(x - 1)(y + 2 - z) = 0,$$

$$(eq_2) \quad f_y = \sin(x - 1) + z = 0,$$

$$(eq_3) \quad f_z = y + 2 - \sin(x - 1) = 0.$$

(eq<sub>1</sub>) ens diu que o bé  $\cos(x - 1) = 0$  o bé  $y + 2 - z = 0$ .

- $\cos(x - 1) = 0 \implies x - 1 = \frac{\pi}{2} + n\pi \implies x = 1 + \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$

En particular:  $\sin(x - 1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n.$

$$(eq_2) \implies z = -\sin(x - 1) = (-1)^{n+1},$$

$$(eq_3) \implies y = \sin(x - 1) - 2 = (-1)^n - 2.$$

Obtenim els punts crítics:  $P_n = \left(1 + \frac{\pi}{2} + n\pi, (-1)^n - 2, (-1)^{n+1}\right)$

• Si  $y + 2 - z = 0$  i restem  $(\text{eq}_3) - (\text{eq}_2) \implies \sin(x - 1) = 0 \implies x - 1 = n\pi \implies x = 1 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ . A més,  $(\text{eq}_2) \implies z = 0$ .

Finalment, la condició  $y + 2 - z = 0 \implies y = -2$ .

Obtenim els punts crítics:  $Q_n = (1 + n\pi, -2, 0)$ .

• La matriu hessiana de  $f$  és:

$$D^2f = \begin{pmatrix} -\sin(x-1)(y+2-z) & \cos(x-1) & -\cos(x-1) \\ \cos(x-1) & 0 & 1 \\ -\cos(x-1) & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Usant que en  $P_n = \left(1 + \frac{\pi}{2} + n\pi, (-1)^n - 2, (-1)^{n+1}\right)$  és té  $\cos(x-1) = 0, \sin(x-1) = (-1)^n$  i  $y + 2 - z = 2(-1)^n$ :

$$D^2f(P_n) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 1}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 2}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\text{Pas 1} = \left\{ \begin{array}{l} f_2 = f_2 + f_3 \\ c_2 = c_2 + c_3 \end{array} \right\}, \quad \text{Pas 2} = \left\{ \begin{array}{l} f_3 = f_3 - \frac{1}{2}f_2 \\ f_3 = c_3 - \frac{1}{2}c_2 \end{array} \right\}.$$

Per tant,  $i_+ = 1, i_- = 2, i_0 = 0 \implies P_n$  punt de sella  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

- Usant que en  $Q_n = (1 + n\pi, -2, 0)$  es té  $y + 2 - z = 0$ ,  $\sin(x - 1) = 0$  i  $\cos(x - 1) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ :

$$D^2f(Q_n) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ (-1)^n & 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Com veurem tot seguit, tan quan  $n$  és parell com senar tenim  $i_+ = 2$ ,  $i_- = 1$ ,  $i_0 = 0 \implies Q_n$  és un punt de sella  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

- **Si  $n$  parell:** Fem **Pas 1** =  $\{f_1 = f_1 - f_3\}$ , **Pas 2** =  $\{f_3 = f_3 + \frac{1}{2}f_1\}$ , **Pas 3** =  $\{f_2 = f_2 + 2f_3\}$ , més les simètriques per columna:

$$D^2f(Q_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 2}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- **Si  $n$  senar:** Fem **Pas 1** =  $\{f_1 = f_1 + f_3\}$ , **Pas 2** =  $\{f_3 = f_3 - \frac{1}{2}f_1\}$ , **Pas 3** =  $\{f_2 = f_2 + 2f_3\}$ , més les simètriques per columna:

$$D^2f(Q_n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 2}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{\text{Pas 3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$