③⑥ Donada la forma quadràtica sobre $\mathbb{R}^3$ definida per:

$q(x,y,z,t) = x^2+2xy+y^2+2xz+2xt+2yt+2zt-t^2$,

trobeu un s.e.v. F (resp. G) de dimensió màxima tal que $q_{|F}$ (resp. $q_{|G}$) sigui definida positiva (resp. def. negat)

· Hem de buscar la forma reduïda de q i una base en la qual l'assoleix: Si $S = Mat_e(q)$ llavors:

$$(S \mid Id_4) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{f_2=f_2-f_1 \\ f_3=f_3-f_1 \\ f_4=f_4-f_1 \\ \text{(idem columnes)}}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

aquí només eliminacus per files

$$\underset{\substack{f_2=f_2-f_3 \\ c_2=c_2-c_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{D} \qquad \underbrace{}_{P^T} \leftarrow$$

matriu transposada del canvi de base

Així: $D = P^T S P$ on $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i si $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$ són les coordenades en base

$u_1=(1\,0\,0\,0)$ $u_2=(0\,1\,-1\,0)$, $u_3=(-1\,0\,1\,0)$, $u_4=(-1\,0\,0\,0)$

(columnes de P) llavors $q(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}) = \bar{x}^2+\bar{y}^2-\bar{z}^2-2\bar{t}^2$.

Per tant podem fer, p. ex.:

$F = [u_1, u_2]$ i $G = [u_3, u_4]$