(35) Donada la forma quadràtica sobre $\mathbb{R}^3$ definida per:

$q(x,y,z) = x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2 + 2xz$

trobeu un s.e.v. F de $\mathbb{R}^3$ de dim = 1 i un s.e.v. G de $\mathbb{R}^3$ de dim = 2 t.q. $q_{|F}$ i $q_{|G}$ siguin definides positives.

- Hem de buscar la forma reduïda de q i una base en la qual l'assoleixi. Si $S = Mat_e(q)$ llavors:

$$(S \mid Id_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{f_2 = f_2 + f_1 \\ f_3 = f_3 - f_1 \\ \text{(Idem columnes)}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

aquí només eliminacions per files

D P^T

on $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ és matriu canvi de base

que redueix la matriu S de q a D. Així, si $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ són les coord. en la base $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (-1,0,1)$

columnes de P

llavors la forma reduïda de q és:

$q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}^2 + \bar{z}^2$

els coeficients són els de la diagonal de D

Així, p.ex. $F = [(1,0,0)]$ o $F = [(-1,0,1)]$

i $G = [(1,0,0), (-1,0,1)]$.