(32) Classifiqueu les formes quadràtiques següents, donant-ne una forma reduïda. Indiqueu també quines són definides positives, negatives o indefinides.

(i) $q(x,y,z) = 2x^2+5y^2+2z^2-4xy-2xz+4yz$

té per matriu en ref canònica $S = Mat_e(q)$:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$f_2 = f_2 + f_1$, $f_3 = f_3 + \frac{1}{2} f_1$; $c_2 = c_2 + c_1$, $c_3 = c_3 + \frac{1}{2} c_1$; $f_3 = f_3 - \frac{1}{3} f_2$, $c_3 = c_3 - \frac{1}{3} c_2$

Així la seva forma reduïda és:

$q(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 - \frac{3}{2}\bar{z}^2$ (no definida)

(ii) $q(x,y,z) = -3x^2+4xy+10xz-4yz$

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 4/3 & +4/3 \\ 0 & 4/3 & 25/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 4/3 & 25/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$f_2 = f_2 + \frac{2}{3} f_1$, $f_3 = f_3 + \frac{5}{3} f_1$; $c_2 = c_2 + \frac{2}{3} c_1$, $c_3 = c_3 + \frac{5}{3} c_1$; $f_3 = f_3 - f_2$, $c_3 = c_3 - c_2$

$q(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = -3\bar{x}^2 + 4/3\,\bar{y}^2 + 7\bar{z}^2$ (no def.)

(iii) $q(x,y,z,t) = 2xt + 6yz$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \sim$$

$f_1 = f_1 + f_4$, $c_1 = c_1 + c_4$; $f_4 = f_4 - \frac{1}{2} f_1$, $c_4 = c_4 - \frac{1}{2} f_1$; $f_2 = f_2 + f_3$, $c_2 = c_2 + c_3$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$f_3 = f_3 - \frac{1}{2} f_2$, $c_3 = c_3 - \frac{1}{2} c_2$

$q(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}) = 2\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - \frac{3}{2}\bar{z}^2 - \frac{1}{2}\bar{t}^2$

(no def.)