(10) Un punt $P \in \mathbb{R}^3$ té projeccions ortogonals $(-2,3,6)$, $(-3,4,4)$ i $(-1,-1/2,3/2)$ en els plans $x+y=1$, $x+z=1$, $y+z=1$, respectivament. Troben-lo.

- Informació molt redundant com veurem: amb dos de les projeccions en tenim (més que!) suficient!
- Observació: si $P \in \mathbb{R}^3$ té proj. ortogonal $Q = \Pi_{\pi}(P)$ en el pla $\pi = \{ax+by+cz=d\}$, llavors $\overrightarrow{QP} \parallel (a,b,c)$ (i.e., el vector $\overrightarrow{QP}$ és $\perp$ a π i per tant $\parallel$ al vector que té coef. els de x,y,z en l'eq. de π).
- En el nostre cas, això vol dir que si $P=(x,y,z)$ llavors $(x+2, y-3, z-6) \parallel (1,1,0) \iff$

$$\iff \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ y-3 & 1 \\ z-6 & 0 \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ y-3 & 1 \\ z-6 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_2 = f_2 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ y-x-5 & 0 \\ z-6 & 0 \end{pmatrix}$$

vol dir que P compleix $y-x-5=0$, $z-6=0$

- Repetim el càlcul pel 2on. dels plans:

$$\begin{pmatrix} x+3 & 1 \\ y-4 & 0 \\ z-4 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_3 = f_3 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} x+3 & 1 \\ y-4 & 0 \\ z-x-7 & 0 \end{pmatrix} \sim P \text{ compleix } \begin{matrix} y-4=0 \\ z-x-7=0 \end{matrix}$$

- Ara ja tenim 4 eqns. per P que afortunadament tenen solució (sinó, el problema estaria mal plantejat!)

$$\left\{ \begin{matrix} y-x-5=0 \\ z-6=0 \\ y-4=0 \\ z-x-7=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{P = (-1,4,6)}$$

$\to x = y+5$

$\to x = z - 7$

- Repetim el càlcul pel 3er. dels plans (per verificar que les dades són coherents):

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ y+1/2 & 1 \\ z-3/2 & 1 \end{pmatrix} \underset{P=(-1,4,6)}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9/2 & 1 \\ 9/2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ com volíem!}$$

vectors proporcionals