

Geometria

Tema 1: Varietats lineals

Presentació adaptada per Jordi Villanueva a partir de la d'en Joaquim Puig (Creative Commons BY-SA-NC-ND).
Veieu la web de l'assignatura per a més informació.

8 de setembre de 2021

Varietats lineals I

- ▶ Una varietat lineal V de dimensió d a $\mathbb{R}^n$ és la generalització de rectes ($d = 1$) a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ i plans ($d = 2$) a $\mathbb{R}^3$, a objectes geomètrics amb “estructura lineal” de dim. $d < n$ vivint a $\mathbb{R}^n$.
- ▶ “Estructura lineal” vol dir que si coneixem un punt qualsevol P sobre V , llavors el reste de punts de V s’obtenen sumant a P els vectors d’un subespai vectorial F de $\mathbb{R}^n$ (de dimensió d).
- ▶ Hi ha dues formes naturals de representar la varietat V :
 - ▶ La **forma paramètrica, vectorial o explícita**: formalització directa de la idea de representar V com “un punt al qual sumem vectors arbitraris de F ”.
 - ▶ La **forma implícita**: caracteritza els punts de V com el conjunt de totes les solucions d’un sistema d’equacions lineals (compatible indeterminat).

Varietats lineals II

Definició (Varietats lineals en forma paramètrica)

Una varietat lineal V de dimensió d a $\mathbb{R}^n$ pot venir donada per:

(a) Forma paramètrica/vectorial/explicita:

$$V = P + F,$$

- ▶ $P \in V$ punt qualsevol de la varietat (punt de pas).
- ▶ $F \subset \mathbb{R}^n$ subespai vectorial de dimensió d (s.e.v. director de V).
- ▶ Més concretament, si $F = [u_1, \dots, u_d]$ (això és: F és el s.e.v. generat pels vectors $u_1, \dots, u_d$ que, per tant, són base de F), llavors qualsevol punt x de V és de la forma:

$$x = P + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d,$$

on la correspondència entre els punts $x \in V$ i els valors $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ és 1 a 1.

Varietats lineals III

Definició (Varietats lineals en forma implícita)

- (b) Forma implícita: Els punts $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ són les solucions d'un sistema d'equacions lineals de la forma $Ax = b$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b$$

(Observació: $a_{i,j}$ element matriu A de la fila i , columna j .)

- ▶ $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matriu de m files i n columnes a coeficients reals de rang $m < n$ (rang màxim) (A té menys files/equacions que columnes/variables) i $b \in \mathbb{R}^m$.
- ▶ La dimensió de V és $d = n - m$ (número de variables menys número d'equacions independents).

Canvi de forma implícita $Ax = b$ a paramètrica $V = P + F$

- ▶ El punt $P \in V$ és qualsevol punt $P = x$ solució de $Ax = b$.
- ▶ El s.e.v. director F de V són els vectors $x \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen el sistema d'equacions homogènies $Ax = 0$.
- $P = x$ podem calcular-lo fent zero el valor de d components de x (en cada cas cal triar les components adequades) i calculant el valor de les altres $m = n - d$ components per tal que $Ax = b$.
Per fixar idees, **suposem que podem fer zero** $x_1, \dots, x_d$.
- Llavors, podem calcular els vectors $F = [u_1, \dots, u_d]$ aïllant de $Ax = 0$ el valor de $x_{d+1}, \dots, x_n$ en termes de $x_1, \dots, x_d$ i fent:
 - ▶ Triem $u_1 = x = (x_1, \dots, x_n)$ fent $(x_1, \dots, x_d) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ i calculant $(x_{d+1}, \dots, x_n)$ per tal que $Ax = 0$.
 - ▶ Triem $u_2 = x = (x_1, \dots, x_n)$ fent $(x_1, \dots, x_d) = (0, 1, 0, \dots, 0)$ i calculant $(x_{d+1}, \dots, x_n)$ per tal que $Ax = 0$.
 - ▶ Triem $u_3 = x = (x_1, \dots, x_n)$ fent $(x_1, \dots, x_d) = (0, 0, 1, \dots, 0)$ etcètera.

Canvi de forma paramètrica $V = P + F$ a implícita $Ax = b$

Si $P = (a_1, \dots, a_n)$ i $F = [u_1, \dots, u_d]$, la forma general de trobar les equacions implícites de $(x_1, \dots, x_n) \in V$ és imposant que el rang de la següent matriu $B \in \mathbb{M}_{n,d+1}(\mathbb{R})$ sigui exactament d :

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} u_1 & u_2 & \vdots & u_d & \begin{array}{c} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{array} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} U & \begin{array}{c} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{array} \end{array} \right)$$

(S'entén que $u_1, \dots, u_d$ són vectors columna de dimensió n .)

Per imposar la condició $\text{rang}(B) = d$ podem fer:

- ▶ Eliminació gaussiana/mètode del pivot per files en B .
- ▶ Buscar S sub-matriu $d \times d$ de la matriu $U \in \mathbb{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ tal que el corresponent menor sigui no nul ($\det S \neq 0$) i imposar que siguin nuls els $n - d$ menors de tamany $(d + 1) \times (d + 1)$ de la matriu A que contenen la sub-matriu S . (El millor és si S pot ser la sub-matriu formada per les d primeres files de U .)

Alguns comentaris:

- El “mètode general” anterior per passar de forma paramètrica a implícita podem simplificar-lo si tractem rectes i plans de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.
- Un s.e.v. F de $\mathbb{R}^n$ el podem fer equivalent a una varietat lineal $V = 0 + F$ que admet $P = 0$ com a punt de pas.
- Si V varietat lineal donada per equacions, llavors podem fer V equivalent a un s.e.v. si el teme independent de totes les seves equacions es 0 (la forma matricial de les equacions és $Ax = 0$).
- Notació 1: Típicament quan representem un vector en “paper” ho fem com un vector “filera” (p.ex., $u = (1, 2)$). Ara bé, quan aquest vector intervé en una matriu o bé en una fórmula, farem millor de pensar que és un vector “columna”: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(Aquest comentari és fonamental a l'hora d'operar usant Matlab.)
- Notació 2: “restar” dos punts, $Q - P$, no és res més que considerar el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ que té inici en P i final en Q .

Exemples d'equacions implícites i paramètriques I

Rectes a $\mathbb{R}^2$: d'implícita a paramètrica

La forma implícita d'una recta r a $\mathbb{R}^2$ és

$$r : ax + by + c = 0$$

on (a, b) vector perpendicular/ortogonal a r i $u = (b, -a)$ (o bé $u = (-b, a)$) vector director de r . La forma paramètrica de r és

$$r = P + [u]$$

on $P = (x_0, y_0)$ és una solució qualsevol de $ax + by + c = 0$.

Podem parametritzar r com:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple:

$$r : 3x - 7y + 4 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

on $P = (-4/3, 0)$ solució particular de $3x - 7y + 4 = 0$ fent $y = 0$.

(Si no volem fraccions també podem triar $P = (1, 1)$.)

Exemples d'equacions implícites i paramètriques II

Rectes a $\mathbb{R}^2$: de paramètrica a implícita

Si la forma paramètrica d'una recta de $\mathbb{R}^2$ és

$$l = P + [u]$$

on $P = (x_0, y_0)$ i $u = (a, b)$, llavors la seva forma implícita és:

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

També podem usar que essent (a, b) director/paral·lel a l , llavors $(b, -a)$ (o $(-b, a)$) és perpendicular a l i, per tant, $(b, -a)$ dona els coeficients de x, y de l'equació de l . Així:

$$l : bx - ay = d,$$

on d el triem per tal que $P = (x_0, y_0)$ sigui de l : $d = bx_0 - ay_0$.

Exemple: Si $l = (2, 11) + [(3, 5)]$, llavors:

$$l : \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 11}{5} \Rightarrow 5x - 3y = -23.$$

$$l : 5x - 3y = d, \quad \text{on } d = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 11 = -23.$$

Exemples d'equacions implícites i paramètriques III

Rectes a $\mathbb{R}^3$: d'implícita a paramètrica

La forma implícita d'una recta r a $\mathbb{R}^3$ és

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}.$$

Els vectors $u_1 = (a, b, c)$ i $u_2 = (e, f, g)$ són $\perp$ a r i el seu producte vectorial, $v = u_1 \wedge u_2 = u_1 \times u_2$, dona un vector director de r :

$$v = u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} k.$$

Un punt de pas P el podem trobar fent zero el valor d'una de les coordenades x, y o z (triada adequadament) en les equacions de r i calculant les altres dues coordenades de P com a solució de les dues equacions resultants.

La forma paramètrica de r és ara:

$$r = P + [v].$$

Exemples d'equacions implícites i paramètriques IV

Comentari: El vector director v de r també es pot calcular com a solució de les equacions homogènies associades a les de r :

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ ex + fy + gz = 0 \end{cases}.$$

Si, p.ex, hem fet $z = 0$ en les equacions de r per calcular P , ara podem fer $z = 1$ en les equacions homogènies per calcular v .

Exemple:

$$r : \begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \underbrace{(-1, -3, 0)}_{\text{solució amb } z=0} + \underbrace{[(0, 2, 1)]}_{\frac{1}{5}u_1 \wedge u_2}.$$

Si fem $z = 0$ en les equacions de r obtenim P punt de pas:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = -3 \Rightarrow P = (x, y, z) = (-1, -3, 0)$$

Exemples d'equacions implícites i paramètriques V

Les equacions del s.e.v. director de r són les equacions homogènies associades a les de r . Podem obtenir $v = (x, y, z)$ vector director de r fent, p.ex., $z = 1$ en aquestes equacions:

$$\underbrace{\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}}_{\text{eqs. s.e.v. de } r} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x - y = -2 \end{cases}}_{\text{Fem } z = 1} \Rightarrow x = 0, y = 2 \Rightarrow v = (0, 2, 1)$$

També podem calcular el vector director v fent producte vectorial dels vectors $u_1 = (1, -2, 4)$ i $u_2 = (3, -1, 2)$ definits via els coeficients de x, y, z de les equacions:

$$v = \underbrace{(1, -2, 4)}_{u_1} \wedge \underbrace{(3, -1, 2)}_{u_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} k = (0, 10, 5).$$

(De fet el natural és definir el vector director dividint v per 5.)

Exemples d'equacions implícites i paramètriques VI

Rectes a $\mathbb{R}^3$: de paramètrica a implícita

Si la forma paramètrica d'una recta de $\mathbb{R}^3$ és

$$l = P + [u] = (x_0, y_0, z_0) + [(a, b, c)]$$

llavors la seva forma implícita és:

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Aquestes igualtats generen 3 equacions (igualant 1a expressió amb 2a, 1a amb 3a, 2a amb 3a) i n'hem de triar 2 d'independents.

També podem generar les equacions de l via el “mètode general”:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a & x - x_0 \\ b & y - y_0 \\ c & z - z_0 \end{bmatrix} = 1. \text{ Si, p.ex., } a \neq 0, \text{ podem considerar les}$$

equacions: $\begin{vmatrix} a & x - x_0 \\ b & y - y_0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & x - x_0 \\ c & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$, que és com considerar les igualtats anteriors 1a amb 2a i 1a amb 3a.

Exemples d'equacions implícites i paramètriques VII

Exemple 1: Si $l = (-5, 4, 0) + [(2, -1, 4)]$, llavors:

$$l : \frac{x - (-5)}{2} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 0}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = -10 \\ 4y + z = 16 \end{cases}$$

(Igualem 1a i 2a amb 3a.)

Exemple 2: Si $l = (-5, 4, 1) + [(2, -1, 0)]$, llavors:

$$l : \frac{x + 5}{2} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z - 1}{0} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 1 \end{cases},$$

on el zero al denominador de la 3a expressió genera directament l'equació $z - 1 = 0$. Per l'altre equació estem obligats a igualar 1a amb 2a.

Exemples d'equacions implícites i paramètriques VIII

Plans a $\mathbb{R}^3$: d'implícita a paramètrica

La forma implícita d'un pla Π a $\mathbb{R}^3$ és

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0$$

on (a, b, c) vector $\perp$ a Π . La forma paramètrica de Π és

$$\Pi = P + [u_1, u_2] = P + [ax + by + cz = 0],$$

on P solució qualsevol de $ax + by + cz + d = 0$ i u_1, u_2 vectors independents solució de l'equació del s.e.v. director de Π .

Si, p.ex., $c \neq 0$, podem triar $P = (x, y, z)$ fent $x = y = 0$ en l'eq.:
 $ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \underbrace{cz + d = 0}_{\text{Fem } x = y = 0} \Rightarrow z = -\frac{d}{c} \Rightarrow P = (0, 0, -\frac{d}{c}).$

Si, p.ex., $c \neq 0$, podem calcular u_1, u_2 aïllant $z = -\frac{ax+by}{c}$ en l'eq. homogènia $ax + by + cz = 0$:

- Si fem $x = c, y = 0 \Rightarrow z = -a \Rightarrow u_1 = (c, 0, -a)$
- Si fem $x = 0, y = c \Rightarrow z = -b \Rightarrow u_2 = (0, c, -b).$

Exemples d'equacions implícites i paramètriques IX

Podem parametritzar Π com:

$$\Pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2$$

Exemple: La forma explícita del pla $\pi : 2x - 5y + 3z + 8 = 0$ és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

on $P = (-4, 0, 0)$ solució de $2x - 5y + 3z + 8 = 0$ fent $y = z = 0$ i

$u_1 = (3, 0, -2)$ i $u_2 = (0, 3, 5)$ i solucions de $2x - 5y + 3z = 0$

aïllant $z = \frac{-2x + 5y}{3}$ i fent:

$$x = 3, y = 0 \implies z = -2 \implies u_1 = (3, 0, -2)$$

$$x = 0, y = 3 \implies z = 5 \implies u_2 = (0, 3, 5).$$

Exemples d'equacions implícites i paramètriques X

Plans a $\mathbb{R}^3$: de paramètrica a implícita

Si la forma paramètrica d'un pla a $\mathbb{R}^3$ és

$$\Sigma = P + [u_1, u_2]$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$, $u_1 = (a, b, c)$ i $u_2 = (d, e, f)$, la seva equació és:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

També podem usar que el producte vectorial

$$v = (g, h, l) = u_1 \wedge u_2$$

és un vector $v \perp \Sigma$. Llavors l'equació de Σ és:

$$gx + hy + lz = \alpha$$

on α el calculem per tal que $P = (x_0, y_0, z_0)$ sigui de Σ :

$$\alpha = gx_0 + hy_0 + lz_0.$$

Exemples d'equacions implícites i paramètriques XI

Exemple: Considerem el pla $\Sigma = \underbrace{(1, 3, 8)}_P + [\underbrace{(-1, 4, 0)}_{u_1}, \underbrace{(2, 5, 1)}_{u_2}]$.

La seva equació implícita és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 4x + y - 13z + 97 = 0.$$

Potser és més ràpid/eficient calcular primer:

$$v = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (4, 1, -13),$$

i buscar l'equació de Σ , via els coeficients de v , com:

$$\Sigma : 4x + y - 13z = \alpha,$$

on α el trobem imposant que $P = (1, 3, 8)$ verifiqui l'equació:

$$\alpha = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 13 \cdot 8 = -97.$$

Posició de 2 varietats a $\mathbb{R}^n$

Siguin $V_1 = P_1 + F_1$ i $V_2 = P_2 + F_2$ dues varietats lineals de $\mathbb{R}^n$, amb punts de pas P_1, P_2 i subespais vectorials directors F_1, F_2 , respectivament. Llavors direm que:

- ▶ V_1, V_2 són *paral·leles* (escriurem $V_1 \parallel V_2$) si $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$. Això és, que el s.e.v. director d'una està inclòs en el de l'altre. ("Varietats paral·leles" inclou els casos en que una de les varietats està inclosa dins de l'altre: $V_1 \subset V_2$ o $V_2 \subset V_1$).
- ▶ V_1, V_2 es *tallen* si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ i $V_1 \nparallel V_2$. Això és, V_1, V_2 tenen almenys un punt en comú però no són pas paral·leles.
- ▶ V_1, V_2 es *creuen* si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $V_1 \nparallel V_2$. Això és, ni tenen cap punt en comú ni tampoc són paral·leles.

Problema 2

Trobeu equacions implícites per les rectes següents:

1. $l_1 : (2, 1, 2) + [(3, 1, 4)]$.
2. l_2 la recta per $P = (1, -1, 1)$, $Q = (0, 3, 2)$.
3. l_3 la recta per $R = (2, 2)$ ortogonal a $l : x - 5y = 12$.
4. l_4 la recta per $S = (3, 1, 1)$ paral·lela a $l' = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 2, 2x + 5z = 4\}$.
5. Calculeu també una equació paramètrica per la recta l' .

Resolució Problema 2.

1. $l_1 : (2, 1, 2) + [(3, 1, 4)]$.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4} \implies \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

on les equacions obtingudes surten d'igualar l'expressió $\frac{x-2}{3}$ amb les altres dues.

2. l_2 la recta per $P = (1, -1, 1)$, $Q = (0, 3, 2)$.

Calculem un vector director de l_2 fent:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 3, 2) - (1, -1, 1) = (-1, 4, 1).$$

Les equacions de l_2 usant aquest vector i P com a punt de pas:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1} \implies \begin{cases} 4x + y - 3 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

3. l_3 la recta per $R = (2, 2)$ ortogonal a $l : x - 5y = 12$.
 $v = (1, -5)$ vector donat pels coeficients de x, y de l'equació de l és $\perp$ a l i per tant director de l_3 . L'equació de l_3 és:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-5} \implies 5x - y + 8 = 0.$$

4. l_4 la recta per $S = (3, 1, 1)$ paral·lela a
 $l' = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 2, 2x + 5z = 4\}$.
 $l_4 \parallel l' \implies$ tenen el mateix s.e.v. director. Les equacions del s.e.v. director de l' són $x + y + 3z = 0, 2x + 5z = 0 \implies$
 $l_4 = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = a, 2x + 5z = b\}$, per uns certs a, b que determinem per tal que $S \in l_4$ verifiqui les equacions:

$$a = 3 + 1 + 3 \cdot 1 = 7, \quad b = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 11.$$

5. Calculeu també una equació paramètrica per la recta

$$l' = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z = 2, 2x + 5z = 4\}.$$

Busquem un punt de pas $P \in l'$ fent $z = 0$ en les equacions:

$$x + y = 2, 2x = 4 \implies x = 2, y = 0 \implies P = (2, 0, 0).$$

Busquem v vector director de l' fent el producte vectorial dels vectors $u_1 = (1, 1, 3)$ i $u_2 = (2, 0, 5)$ definits pels coeficients de x, y, z de les dues equacions de la recta:

$$v = u_1 \wedge u_2 = (1, 1, 3) \wedge (2, 0, 5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (5, 1, -2)$$

L'expressió paramètrica de l' és:

$$l' = P + [v] = (2, 0, 0) + [(5, 1, -2)]$$

o bé:

$$(x, y, z) = (2 + 5\lambda, \lambda, -2\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 5

1. Trobeu l'equació implícita del pla Π_1 que passa pels punts $P_1 = (4, 0, 3)$, $P_2 = (1, -1, 2)$, $P_3 = (5, 5, 0)$.
2. Trobeu l'equació paramètrica del pla $\Pi_2 : 2x + 2y - z = 1$.
3. Hi ha rectes contingudes en Π_1 que siguin paral·leles a Π_2 ? En cas afirmatiu trobeu-les totes (equació implícita).

Resolució Problema 5.

1. Busquem dos vectors directors de Π_1 fent:
 $\overrightarrow{P_2 P_1} = P_1 - P_2 = (3, 1, 1)$, $\overrightarrow{P_1 P_3} = P_3 - P_1 = (1, 5, -3)$.
Useu aquests dos vectors i P_1 com a punt de pas per obtenir l'equació implícita de Π_1 :

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} (x-4) - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} (z-3) = -8(x-4) + 10y + 14(z-3) = 0.$$

$$\text{Obtenim } -8x - 10y + 14z = 10 \implies -4x + 5y + 7z = 5.$$

2. Trobeu l'equació paramètrica del pla $\Pi_2 : 2x + 2y - z = 1$.
 Busquem $P = (0, 0, -1) \in \Pi_2$ fent $x = y = 0 \implies z = -1$.
 Busquem v_1, v_2 vectors directors independents de Π_2 com a solució de l'equació homogènia $2x + 2y - z = 0$. Aïllem $z = 2x + 2y$ i fem:
 $x = 1, y = 0 \implies z = 2 \implies v_1 = (1, 0, 2),$
 $x = 0, y = 1 \implies z = 2 \implies v_2 = (0, 1, 2).$
 Obtenim: $\Pi_2 = P + [v_1, v_2] = (0, 0, -1) + [(1, 0, 2), (0, 1, 2)].$
3. Trobeu les rectes contingudes en Π_1 paral·leles a Π_2 .
 $\Pi_1 = \{-4x + 5y + 7z = 5\}$ i $\Pi_2 = \{2x + 2y - z = 1\}$ no són paral·lels (ja que $(-4, 5, 7) \nparallel (2, 2, -1)$). Una solució és $l_1 = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \{-4x + 5y + 7z = 5, 2x + 2y - z = 1\}$.
 Qualsevol altre recta solució ha d'estar continguda a Π_1 i ser paral·lela a l_1 . Obtenim la família 1-paramètrica de rectes:

$$l_\lambda = \{-4x + 5y + 7z = 5, 2x + 2y - z = \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La primera equació diu $l_\lambda \subset \Pi_1$. La segona equació garanteix que el s.e.v. director de l_λ sigui el mateix que el de l_1 :
 $\{-4x + 5y + 7z = 0, 2x + 2y - z = 0\} \implies l_\lambda \parallel l_1.$

Problema 7

Trobeu la recta l que passa pel punt $P = (-1, 4, 1)$ i talla les rectes $l_1 = (1, 1, 1) + [(1, 0, 4)]$ i $l_2 = \{x - 2y - z = 1, 3x + 5z = 2\}$.

- Un punt genèric de l_1 és $Q = (1 + \lambda, 1, 1 + 4\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2 + \lambda, -3, 4\lambda)$ és, per un cert λ , vector director de la recta l . Per aquest λ , la forma paramètrica de l és:

$$(x, y, z) = P + \mu \cdot \overrightarrow{PQ} = (-1 + \mu(2 + \lambda), 4 - 3\mu, 1 + 4\mu\lambda),$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ és el paràmetre de la recta. Això garanteix que l passa per P i talla l_1 . Si volem que sigui la de l'enunciat cal que (x, y, z) compleixi les equacions de l_2 per uns certs λ, μ :

$$\begin{aligned}x - 2y - z = 1 &\implies [-1 + \mu(2 + \lambda)] - 2(4 - 3\mu) - (1 + 4\mu\lambda) = 1, \\2x + 5z = 2 &\implies 3[-1 + \mu(2 + \lambda)] + 5(1 + 4\mu\lambda) = 2.\end{aligned}$$

Obtenim: $8\mu - 3\lambda\mu = 11$, $6\mu + 23\lambda\mu = 0$. Com que cal $\mu \neq 0$, la segona equació ens diu $6 + 23\lambda = 0 \implies \lambda = -6/23$. Per tant:

$$\overrightarrow{PQ} = (40/23, -3, -24/23) \implies l = (-1, 4, 1) + [(40, -69, -24)].$$

Problema 8.i

(i) Trobeu l'equació del pla Π que passa per $(1, 2, 4)$ i conté a la recta $l : \{x + y + z = 3, \quad 2y + z = 2\}$.

Tot pla Π que conté l ha de tenir com a equació una combinació lineal de les dues equacions que defineixen l . Raó: l'equació lineal del pla s'ha de complir si (x, y, z) compleix les dues equacions de l . Cal doncs que, per uns certs λ, μ :

$$\Pi = \{ \lambda (x + y + z - 3) + \mu (2y + z - 2) = 0 \}.$$

Si demanem que $(1, 2, 4) \in \Pi$, cal:

$$\lambda (1+2+4-3) + \mu (2 \cdot 2 + 4 - 2) = 0 \implies 4\lambda + 6\mu = 0 \implies 2\lambda + 3\mu = 0.$$

Observem que tota parella de solucions per λ, μ són proporcionals i donen lloc a equacions proporcionals per Π (tal com toca!). Triem $\lambda = 3$ i $\mu = -2$:

$$\Pi = \{ 3x - y + z - 5 = 0 \}.$$

Referències afins de $\mathbb{R}^n$

Definició

Una *referència afí* $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^n$ ve donada per un punt $O \in \mathbb{R}^n$ i una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. El punt O s'anomena *origen* (de la ref.) i els vectors de la base s'anomenen *eixos*. Escriurem:

$$\mathbf{e} = \{O; e_1, \dots, e_n\}.$$

Les *coordenades* $(P)_{\mathbf{e}}$ d'un punt $P \in \mathbb{R}^n$ en referència $\mathbf{e}$ són les coordenades del vector $\overrightarrow{OP}$ en base $e_1, \dots, e_n$. Per tant, escriure

$$(P)_{\mathbf{e}} = (a_1, \dots, a_n)$$

vol dir:

$$\overrightarrow{OP} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \iff P = O + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Si treballem en una certa ref. afí, potser volem fer un canvi de ref. per, p.ex., simplificar l'expressió d'alguna varietat lineal. Els canvis de ref. afí són anàlegs als canvis de base en d'àlgebra, però ara cal canviar els vectors de la base i també les coord. de l'origen.

Breu recordatori de canvis de base (Àlgebra Lineal)

$M = M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ matriu $n \times n$ de canvi de base $\{u_i\} = \{u_1, \dots, u_n\}$ a base $\{e_i\} = \{e_1, \dots, e_n\}$ si les columnes de M són les components dels vectors $u_1, \dots, u_n$ expressats en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Això és, si

$$u_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

llavors el vector $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és la primera columna de M , etc.

Propietats dels canvis de base ($\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ vector **columna** qualsevol):

- $$\underbrace{(\vec{v})_{\{e_i\}}}_{\vec{v} \text{ en base } \{e_i\}} = M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} \cdot \underbrace{(\vec{v})_{\{u_i\}}}_{\vec{v} \text{ en base } \{u_i\}}.$$
- $M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} = (M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}})^{-1}$ (el canvi de base contrari té com a matriu la inversa de la del canvi de base).
- $M_{\{v_i\} \rightarrow \{u_i\}} = M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} \cdot M_{\{v_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ (la composició de canvis de base es fa multiplicant les matrius dels canvis **en l'ordre adequat**):

$$\{v_i\} \longrightarrow \{e_i\} \longrightarrow \{u_i\}$$

Exemple canvis de base en $\mathbb{R}^2$ I

Considereu les següents tres bases de $\mathbb{R}^2$: $\{e_i\}$, $\{u_i\}$ i $\{v_i\}$, on:

$\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ (base natural/canònica de $\mathbb{R}^2$);

$\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1)$; $\vec{v}_1 = (2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2)$,

($\{u_i\}$, $\{v_i\}$ donats per les seves components en base canònica.)

Qüestió: Si $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ és un vector tal que les seves components en base $\{v_i\}$ són $(\vec{w})_{\{v_i\}} = (1, -2)$, trobeu $(\vec{w})_{\{e_i\}}$ i $(\vec{w})_{\{u_i\}}$.

• Com tenim les components de $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ en base canònica, és immediat donar les següents matrius de canvi de base:

$$M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{columnes } \vec{u}_1, \vec{u}_2}, \quad M_{\{v_i\} \rightarrow \{e_i\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{columnes } \vec{v}_1, \vec{v}_2}$$

• Per tant:

$$(\vec{w})_{\{e_i\}} = M_{\{v_i\} \rightarrow \{e_i\}} \cdot (\vec{w})_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exemple canvis de base en $\mathbb{R}^2$ II

- Usem les components $(\vec{w})_{\{e_i\}}$ per calcular $(\vec{w})_{\{u_i\}}$ pel canvi:

$$M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} = (M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

usant la següent fórmula (molt útil) pel càlcul d'inverses 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- Finalment:

$$(\vec{w})_{\{u_i\}} = M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} \cdot (\vec{w})_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- També es pot calcular $(\vec{w})_{\{u_i\}} = M_{\{v_i\} \rightarrow \{u_i\}} \cdot (\vec{w})_{\{v_i\}}$, però llavors cal calcular previamente:

$$\begin{aligned} M_{\{v_i\} \rightarrow \{u_i\}} &= M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} \cdot M_{\{v_i\} \rightarrow \{e_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Canvis de referència en geometria afí en $\mathbb{R}^n$ I

- ▶ Els canvis de referència afí involucren l'origen i els eixos.
- ▶ Donades dues referències afins a $\mathbb{R}^n$:
 $\mathbf{u} = \{P; u_1, \dots, u_n\}$, $\mathbf{e} = \{O; e_1, \dots, e_n\}$,
el canvi de la ref. $\mathbf{u}$ a la ref. $\mathbf{e}$ el codifiquem mitjançant la següent matriu $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$ **de tamany** $(n+1) \times (n+1)$:

$$A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} & & (P)_e \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

on:

- ▶ $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ és la matriu canvi de base $\{u_i\}$ a $\{e_i\}$.
- ▶ $(P)_e$ són les coordenades de P (origen ref. $\mathbf{u}$) en ref. $\mathbf{e}$.

Canvis de referència en geometria afí en $\mathbb{R}^n$ II

Per usar la matriu $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$ per processar el canvi de ref. $\mathbf{u}$ a ref. $\mathbf{e}$, usem el següent conveni per gestionar punts de $\mathbb{R}^n$ i vectors de $\mathbb{R}^n$.

- ▶ Si $(q_1, \dots, q_n)$ coordenades del punt Q , en una certa ref. afí, per aplicar una matriu de canvi de ref. $(n+1) \times (n+1)$ a aquestes coordenades cal afegir 1 al final de les coord.
- ▶ Si $(w_1, \dots, w_n)$ components del vector $\vec{w}$, en una certa base, per aplicar una matriu de canvi de ref. $(n+1) \times (n+1)$ a aquestes components cal afegir 0 al final de les components.

$$\text{▶ } \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (punt), } \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (vector).}$$

Canvis de referència en geometria afí en $\mathbb{R}^n$ III

Lavors tenim les següents propietats per la matriu del canvi $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$:

1. Si $(Q)_{\mathbf{u}} = (q_1^u, \dots, q_n^u)$ coordenades del punt Q en ref. afí $\mathbf{u}$, les seves coordenades $(Q)_{\mathbf{e}} = (q_1^e, \dots, q_n^e)$ en ref. $\mathbf{e}$ verifiquen:

$$\begin{pmatrix} (Q)_{\mathbf{e}} \\ 1 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} \begin{pmatrix} (Q)_{\mathbf{u}} \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} q_1^e \\ \vdots \\ q_n^e \\ 1 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} \begin{pmatrix} q_1^u \\ \vdots \\ q_n^u \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $(\vec{w})_{\{u_i\}} = (w_1^u, \dots, w_n^u)$ components vector $\vec{w}$ base $\{u_i\}$, les seves components $(\vec{w})_{\{e_i\}} = (w_1^e, \dots, w_n^e)$ base $\{e_i\}$ són:

$$\begin{pmatrix} (\vec{w})_{\{e_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} \begin{pmatrix} (\vec{w})_{\{u_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} w_1^e \\ \vdots \\ w_n^e \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} \begin{pmatrix} w_1^u \\ \vdots \\ w_n^u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Canvis de referència en geometria afí en $\mathbb{R}^n$ IV

3. El canvi de referencia oposat té matriu inversa:

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = (A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}})^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1} & & & -M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1} (P)_{\mathbf{e}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

on $(O)_{\mathbf{u}} = -M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1} (P)_{\mathbf{e}}$ coord. del punt O en ref. $\mathbf{u}$.

4. Sigui $V = Q + [\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d]$ varietat lineal $V \subset \mathbb{R}^n$, de la que coneixem les seves equacions paramètriques en ref. $\mathbf{e}$ (això és, les coord. $(Q)_{\mathbf{e}}$ i les components de $(\vec{w}_1)_{\{e_i\}}, \dots, (\vec{w}_d)_{\{e_i\}}$). Llavors, podem obtenir les seves eq. paramètriques en ref. $\mathbf{u}$ aplicant $A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}}$ al punt de pas i als vectors de la base del s.e.v. director.

Canvis de referència en geometria afí en $\mathbb{R}^n$ V

5. $V \subset \mathbb{R}^n$ varietat lineal de dimensió $d < n$ de la que coneixem la seva forma implícita en ref. $\mathbf{e}$, donada per $n - d$ equacions independents que, en forma matricial, podem escriure com:

$$M^e \cdot \begin{pmatrix} x_1^e \\ \vdots \\ x_n^e \end{pmatrix} = b^e \iff (M^e | -b^e) \cdot \begin{pmatrix} x_1^e \\ \vdots \\ x_n^e \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

on: $M^e \in \mathbb{M}_{n-d,n}$ i $b^e \in \mathbb{R}^{n-d}$ matriu i terme independent del sistema lineal d'equacions que defineix V ; $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-d}$ vector de zeros; $(M^e | -b^e) \in \mathbb{M}_{n-d,n+1}$ matriu que s'obté afegint a M_e una columna extra donada per $-b^e$. La idea és que l'expressió

$$(M^e | -b^e) \cdot \begin{pmatrix} x_1^e \\ \cdots \\ x_n^e \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ es transforma bé en aplicar } A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}.$$

Canvis de referència en geometria afí en $\mathbb{R}^n$ VI

Concretament, si les equacions implícites de V en ref. $\mathbf{e}$ són

$$(M^e| - b^e) \cdot \begin{pmatrix} x_1^e \\ \vdots \\ x_n^e \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}, \text{ llavors les seves equacions en ref. } \mathbf{u}$$

són:

$$(M^u| - b^u) \cdot \begin{pmatrix} x_1^u \\ \vdots \\ x_n^u \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff M^u \cdot \begin{pmatrix} x_1^u \\ \vdots \\ x_n^u \end{pmatrix} = b^u$$

on:

$$(M^u| - b^u) = (M^e| - b^e) \cdot A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}.$$

Exemple de canvi de referència afí en $\mathbb{R}^2$ I

Considereu els sistemes de referència afí $\mathbf{e}$ (ref. canònica $\mathbb{R}^2$) i $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{e} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \quad O = (0, 0), \quad \vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

$$\mathbf{u} = \{P; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}, \quad P = (2, -1), \quad \vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Observació: Els vector $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ formen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$:
 $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$ (producte escalar 0), $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$ (norma 1) $\implies$

La matriu de canvi de base $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ és una matriu ortogonal i la seva inversa és la seva transposta $M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} = (M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}})^T$:

$$M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{\text{columnes } \vec{u}_1, \vec{u}_2} \implies M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{\text{transposta de l'anterior}}$$

Exemple de canvi de referència afí en $\mathbb{R}^2$ II

- Les matrius dels canvis de ref. $A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$ i $A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = (A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}})^{-1}$ són:

$$A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{cc|c} M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} & (P)_e \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = \left(\begin{array}{cc|c} M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1} & -M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1}(P)_e \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on $(O)_{\mathbf{u}} = -M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1}(P)_e$, coord. del punt O en ref. $\mathbf{u}$, són:

$$(O)_{\mathbf{u}} = - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple de canvi de referència afí en $\mathbb{R}^2$ III

• **Canvi de punts:** Considerem el punt Q que en ref. canònica té coord. $(Q)_e = (5, 4)$. En ref. u és $(Q)_u = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\begin{pmatrix} (Q)_u \\ 1 \end{pmatrix} = A_{e \rightarrow u} \cdot \begin{pmatrix} (Q)_e \\ 1 \end{pmatrix} = A_{e \rightarrow u} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observació: Verificar el resultat $(Q)_u = (\alpha_1, \alpha_2)$ vol dir que:
 $Q = P + \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2$. En efecte, si usem coord. en ref. canònica:

$$\begin{aligned} P + \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 &= (2, -1) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (5, 4) = Q. \end{aligned}$$

Exemple de canvi de referència afí en $\mathbb{R}^2$ IV

- **Canvi de vectors:** El vector $\vec{v}$ que en base canònica és $(\vec{v})_{\{e_i\}} = (2, -5)$, en base $\{u_i\}$ és $(\vec{v})_{\{u_i\}} = (\sqrt{3} - \frac{5}{2}, -1 - \frac{5}{2}\sqrt{3})$:

$$\begin{pmatrix} (\vec{v})_{\{u_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} (\vec{v})_{\{e_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{5}{2} \\ -1 - \frac{5}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquest resultat també el podem obtenir aplicant directament la matriu del canvi de base $M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} = (M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}})^{-1}$:

$$(\vec{v})_{\{u_i\}} = M_{\{e_i\} \rightarrow \{u_i\}} \cdot (\vec{v})_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{5}{2} \\ -1 - \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple de canvi de referència afí en $\mathbb{R}^2$

- La recta r que en ref. $\mathbf{e}$ té equació $3x - 5y = 2$, en ref. $\mathbf{u}$ és $\left(3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)\bar{x} - \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)\bar{y} = -9$, on $(\bar{x}, \bar{y})$ coord. en ref. $\mathbf{u}$:

$$3x - 5y = 2 \iff 3x - 5y - 2 = 0 \iff (M^e | -b^e) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

on $(M^e | -b^e) = (3 \ -5 \ -2)$.

Per tant, l'equació de r en ref. $\mathbf{u}$ és:

$$(M^u | -b^u) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \left(3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)\bar{x} - \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)\bar{y} + 9 = 0,$$

on $(M^u | -b^u) = (M^e | -b^e) \cdot A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}}$ ve donat pel càlcul:

$$(3 \ -5 \ -2) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \mid -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3} \mid 9\right)$$

Exemple de canvi de referència afí en $\mathbb{R}^2$ VI

- També podem fer l'apartat anterior usant la forma paramètrica $r = Q + [\vec{v}]$, transformant $Q = (-1, -1)$ i $\vec{v} = (5, 3)$.

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la forma paramètrica de r en ref. $\mathbf{u}$ és:

$$r = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{(Q)_{\mathbf{u}}} + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 5\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right]}_{[(\vec{v})_{\{u_i\}}]}.$$

A partir d'aquesta forma paramètrica de r en ref. $\mathbf{u}$, la seva forma implícita en ref. $\mathbf{u}$ és: $\left(\frac{5}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \bar{x} + \left(5\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right) \bar{y} = \alpha$ on, demanant que $(Q)_{\mathbf{u}}$ verifiqui l'equació obtenim $\alpha = -9$.

Problema 9

Referència $\mathbf{u} = \{P = (2, -1); u_1 = (2, 3), u_2 = (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculeu les matrius de canvi de la referència $\mathbf{u}$ a la canònica $\mathbf{e} = \{O = (0, 0); \vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ i viceversa.
2. Calculeu en la referència $\mathbf{u}$ les coordenades dels punts $P_1 = (1, 4), P_2 = (2, 2), P_3 = (-1, 1)$.
3. Passeu a la referència canònica les equacions (paramètriques o implícites) de les rectes en referència $\mathbf{u}$ donades per:
 $l_1 : (1, 8) + [(2, 3)], \quad l_2 : 3\bar{x} + \bar{y} = 6.$

Resolució Problema 9.

1. Com que P, u_1, u_2 estan expressats en ref. $\mathbf{e}$ és directe donar:

$$A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \text{on } M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

($M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ té per columnes u_1, u_2 en base canònica i la darrera columna de $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ és P en ref. $\mathbf{e}$.)

1. (Continuació) Per tant, el canvi invers és:

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

on $M_{\{\mathbf{e}_i\} \rightarrow \{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (M_{\{\mathbf{u}_i\} \rightarrow \{\mathbf{e}_i\}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ i

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} = (P)_{\mathbf{u}} = -M_{\{\mathbf{u}_i\} \rightarrow \{\mathbf{e}_i\}}^{-1} (P)_{\mathbf{e}} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculeu en la ref. $\mathbf{u}$ les coordenades del punt $P_1 = (1, 4)$.
Recordem que per transformar punts via $A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}}$ hem d'afegir un 1 a la darrera component del punt:

$$\begin{pmatrix} (P_1)_{\mathbf{u}} \\ 1 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} (P_1)_{\mathbf{e}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant $(P_1)_{\mathbf{u}} = (-7, 13)$. Per $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (-1, 1)$ es té $(P_2)_{\mathbf{u}} = (-3, 6)$, $(P_3)_{\mathbf{u}} = (-8, 13)$ fent càlculs anàlegs.

3. Passeu a la ref. **e** les expressions de les rectes en ref. **u**

donades per: $l_1 : (1, 8) + [(2, 3)]$, $l_2 : 3\bar{x} + \bar{y} = 6$.

- Per a l_1 passem a la referència **e** el punt $(Q)_u = (1, 8)$ i el vector director $(v)_{\{u_i\}} = (2, 3)$ (recordem que per transformar vectors via $A_{u \rightarrow e}$ hem d'afegir un 0 a la darrera component):

$$\begin{pmatrix} (Q)_e \\ 1 \end{pmatrix} = A_{u \rightarrow e} \begin{pmatrix} (Q)_u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (v)_{\{e_i\}} \\ 1 \end{pmatrix} = A_{u \rightarrow e} \begin{pmatrix} (v)_{\{u_i\}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant en ref. **e** és $l = (Q)_e + [(v)_{\{e_i\}}] = (12, 18) + [(7, 12)]$.

- Per a l_2 transformem la seva eq. implícita $3\bar{x} + \bar{y} - 6 = 0$.

$$\text{L'expressem com } 0 = (M^u \mid -b^u) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = (3 \quad 1 \quad -6) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix},$$

on $(\bar{x}, \bar{y})$ denoten les coordenades en ref. **u**.

3. (Continuació) Apliquem $A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}}$ a $(M^u | -b^u) = (3 \ 1 \ -6)$:

$$\begin{aligned}(M^e | -b^e) &= (M^u | -b^u) A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = (3 \ 1 \ -6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (3 \ -1 \ -13).\end{aligned}$$

Per tant, si (x, y) denoten les coordenades en ref. $\mathbf{e}$, llavors l'equació de l_2 en ref. $\mathbf{e}$ és:

$$0 = (M^e | -b^e) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (3 \ -1 \ -13) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 3x - y - 13.$$

Problema 10

1. Calculeu les dues matrius de canvi entre les refs. **e** i **u** de $\mathbb{R}^3$:
 $\mathbf{e} = \{O = (0, 0, 0); e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$,
 $\mathbf{u} = \{P = (1, 0, 1); u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 1)\}$
Siguin (x, y, z) coord. en ref. canònica **e** i $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ en ref. **u**.
2. Passeu de ref. **e** a **u** el pla $\Pi = (2, 1, 1) + [(3, 0, 1), (1, 1, 1)]$ i la recta $l = \{2x - y + z = 5, 2y + z = -2\}$.
3. Passeu de ref. **u** a **e** el pla $\Pi' = (0, 1, 0) + [(2, 2, 1), (1, 2, 2)]$ i la recta $l' = \{\bar{x} + \bar{y} - 3\bar{z} + 127 = 0, 4\bar{x} + 5\bar{y} - 15\bar{z} + 616 = 0\}$.

Resolució Problema 10.

1. És directe donar la matriu

$$A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \left(\begin{array}{ccc|c} M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} & (P)_e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

($M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ matriu que té columnes u_1, u_2, u_3 en base $\{e_i\}$.)

1. (Continuació) La matriu del canvi invers és

$$A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} = \left(\begin{array}{ccc|c} M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1} & -M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1}(P)\mathbf{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

El punt clau del càlcul és invertir $M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}$ fent eliminació gaussiana/mètode del pivot per files:

$$(M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}} | \text{Id}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

on la matriu final que hem obtingut és ara $(\text{Id}_3 | M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1})$.
Finalment:

$$-M_{\{u_i\} \rightarrow \{e_i\}}^{-1}(P)\mathbf{e} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Passeu de ref. $\mathbf{e}$ a $\mathbf{u}$ el pla $\Pi = (2, 1, 1) + [(3, 0, 1), (1, 1, 1)]$ i la recta $l = \{2x - y + z = 5, 2y + z = -2\}$.

• Per transformar un punt/vector via $A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}}$ afegim 1/0 a la darrera component del punt/vector. Triem $(Q)_{\mathbf{e}} = (2, 1, 1)$ (punt) i $(w_1)_{\{e_i\}} = (3, 0, 1)$, $(w_2)_{\{e_i\}} = (1, 1, 1)$ (vectors):

$$\begin{pmatrix} (Q)_{\mathbf{u}} \\ 1 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} (Q)_{\mathbf{e}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (w_1)_{\{u_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} (w_1)_{\{e_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (w_2)_{\{u_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} (w_2)_{\{e_i\}} \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{u}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Pi = (Q)_{\mathbf{u}} + [(w_1)_{\{u_i\}}, (w_2)_{\{u_i\}}] = (1, 0, 0) + [(-1, -3, 4), (0, 0, 1)].$$

2. (Continuació) Per transformar les eqs. de I les expressem com:

$$I = \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z - 5 = 0 \\ 2y + z + 2 = 0 \end{array} \right\} \iff (M^e | -b^e) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(M^e | -b^e) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Per obtenir-les en ref } \mathbf{u}:$$

$$\begin{aligned} (M^u | -b^u) &= (M^e | -b^e) A_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les equacions de I en ref. $\mathbf{u}$ són:

$$(M^u | -b^u) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} + 2\bar{z} - 2 = 0 \\ 2\bar{x} + 3\bar{y} + 3\bar{z} + 3 = 0 \end{array} \right\}.$$

3. Passeu de ref. **u** a **e** el pla $\Pi' = (0, 1, 0) + [(2, 2, 1), (1, 2, 2)]$ i la recta $l' = \{\bar{x} + \bar{y} - 3\bar{z} + 127 = 0, 4\bar{x} + 5\bar{y} - 15\bar{z} + 616 = 0\}$. Anàleg apartat anterior. Π' ve donat pel punt $(Q)_u = (0, 1, 0)$ i vectors $(w_1)_{\{u_i\}} = (2, 2, 1)$, $(w_2)_{\{u_i\}} = (1, 2, 2)$, i les eqs. de l' per la matriu $(M^u \mid -b^u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 127 \\ 4 & 5 & -15 & 616 \end{pmatrix}$. Ara es té:

$$A_{u \rightarrow e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{u \rightarrow e} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{u \rightarrow e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 127 \\ 4 & 5 & -15 & 616 \end{pmatrix} A_{e \rightarrow u} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -4 & 135 \\ -20 & 24 & -19 & 655 \end{pmatrix}.$$

Per tant, en la ref. **e**, es té:

$$\Pi' = (1, 1, 2) + [(3, 5, 3), (3, 5, 4)],$$

$$l' = \{-4x + 5y - 4z + 135 = 0, -20x + 24y - 19z + 655 = 0\}.$$