- Separació de variables en l'eq. de Poisson en dominis rectangulars

$$(*)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=2y, & x\in(0,\pi),\ y\in(0,2\pi) \\ u(x,0)=0 & x\in[0,\pi] \\ u(x,2\pi)=2\pi x^2 & x\in[0,\pi] \\ u(0,y)=0 & y\in[0,2\pi] \\ u(\pi,y)=1 & y\in[0,2\pi] \end{cases}$$

(Condicions de frontera tipus Dirichlet)

- <u>Pas 0</u>: L'edp $u_{xx}+u_{yy}=2y$ no és homogènia, per tant en 1er. lloc hem de trobar una solució particular que ens permeti eliminar el terme no homogeni "$2y$". <u>Indicació</u>: Anem a buscar $v(x,y)$ una solució particular de $u_{xx}+u_{yy}=2y$ en variables separades, i.e., $v(x,y)=\alpha(x)\cdot\beta(y)$. Cal:

$$v_{xx}+v_{yy}=\alpha''(x)\beta(y)+\alpha(x)\beta''(y)=2y.$$

Com que el terme de la dreta, $2y$, no depèn de x i és lineal en y, és natural triar $\beta(y)=y$, de forma que $\beta''(y)=0$. Llavors, si fem $\alpha(x)=x^2$ l'equació és compleix. Triem doncs $\boxed{v(x,y)=x^2y}$

Fem ara el canvi de funció incògnita $\boxed{w(x,y)=u(x,y)-v(x,y)}$

Llavors, $w(x,y)$ verifica:

$$(**)\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=\underline{0} \quad \text{(ja que } v(x,y) \text{ és solució particular de la edp no homogènia)} \\ w(x,0)=u(x,0)-v(x,0)=0-0=\underline{0} \\ w(x,2\pi)=u(x,2\pi)-v(x,2\pi)=2\pi x^2-2\pi x^2=\underline{0} \\ w(0,y)=u(0,y)-v(0,y)=0-0=\underline{0} \\ w(\pi,y)=u(\pi,y)-v(\pi,y)=\underline{1-\pi^2y} \end{cases}$$

- <u>Pas 1</u>: observeu que l'eq. (**) per a w té una única condició ~~de~~ de frontera no homogènia! <u>No cal fer-lo</u>
- <u>Pas 2</u>: Busquem solucions en variables separades $w(x,y) = X(x)\,Y(y)$ de l'eq. homogènia auxiliar associada a (**).

$$(**)' \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & x \in (0,\pi),\ y \in (0,2\pi) \\ w(x,0) = 0 \\ w(x,2\pi) = 0 \\ w(0,y) = 0 \end{cases}$$

obtenim les condicions:

$$X''Y + XY'' = 0 \iff \boxed{-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \mu \equiv \text{Const.}}$$

$$X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$$

$$X(x)\,Y(2\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(2\pi) = 0}$$

$$X(0)\,Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$$

- Resolem l'eq. per Y:

$$\left.\begin{aligned} Y'' &= \mu Y \\ Y(0) &= Y(2\pi) = 0 \end{aligned}\right\}$$ P.V.F. homogeni per a Y

vap's: $\mu = \mu_n = -\frac{n^2}{4}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

fup's: $Y_n(x) = \cancel{B} \sin\left(\frac{ny}{2}\right)$

(fem $B=1$)

- Resolem l'eq. per X:

$$\left.\begin{aligned} X_n'' &= -\mu_n X_n = \frac{n^2}{4} X_n \\ X_n(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &X_n(x) = A\cosh\left(\frac{n}{2}y\right) + B\sinh\left(\frac{n}{2}y\right) \\ &0 = X_n(0) = A \end{aligned}$$

Per tant: $X_n(x) = \cancel{B} \sinh\left(\frac{nx}{2}\right)$

(fem $B=1$)

Així: $\boxed{u_n(x,y) = X_n(x)\,Y_n(y) = \sinh\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{ny}{2}\right),\ n \geq 1}$

· __Pas 3__: Resolem l'eq. (**) per a w.

Per homogenitat de l'eq. (**)', qualsevol combinació de solucions en variables separades és solució de (**)':

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right)$$

On els coeficients $\{a_n\}_{n\geq 1}$ els determinem imposant:

$$1-\pi^2 y = w(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{= b_n} \sin\left(\frac{ny}{2}\right), \; y \in [0, 2\pi]$$

Per tant, els coef's. $\{b_n\}_{n\geq 1}$ són els coef.'s de Fourier del desenvolupament de $f(y) = 1-\pi^2 y$ en sinus en l'interval $[0, 2\pi]$, i.e.,

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\pi^2 y)\sin\left(\frac{ny}{2}\right) dy \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi}(1-\pi^2 y)\frac{\cos\left(\frac{ny}{2}\right)}{-n/2}\Bigg|_{y=0}^{y=2\pi} -$$

integrem per parts
$U = 1-\pi^2 y$; $dV = \sin\left(\frac{ny}{2}\right) dy$

$$- \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{n}{2}y\right)}{-n/2}\cdot(-\pi^2)\, dy}_{= 0 \leftarrow \text{integral immediata}} \underset{\uparrow}{=} 4\pi^2 \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$$

__Recordeu__: $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Així:

$$\boxed{w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \sinh\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right)}$$

i finalment:

$$\boxed{u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) = x^2 y + w(x,y)}$$

és la solució de l'eq. (*)