- Separació de variables per l'equació de Laplace en un domini rectangular.

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & u=u(x,y), \quad (x,y)\in(0,\pi)\times(0,2\pi) \\ u(x,0)=0 \\ u(x,2\pi)=f(x) \\ u(0,y)=0 \\ u(\pi,y)=0 \end{cases}$$

Busquem solucions en variables separades, $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$, del problema homogeni auxiliar $(\mathrm{I})'$

$$(\mathrm{I})'\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow X''Y+XY''=0 \Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{només depèn de } x}=-\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\text{només depèn de } y}=\mu\equiv\text{Const.}} \\ u(x,0)=0 \Rightarrow X(x)Y(0)=0 \Rightarrow \boxed{Y(0)=0} \\ u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)Y(y)=0 \Rightarrow \boxed{X(0)=0} \\ u(\pi,y)=0 \Rightarrow X(\pi)Y(y)=0 \Rightarrow \boxed{X(\pi)=0} \end{cases}$$

Resolem l'equació per $X$ (problema amb valors a la frontera):

$$\left.\begin{array}{l} X''=\mu X \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{array}\right\} \quad \text{Solucions no trivials: } \mu_m=-m^2,\ m\geq 1 \ \text{(vap's)}$$
$$X_m(x)=\sin(mx) \quad \text{(funcions pròpies)}$$

Resolem l'equació per $Y$ quan $\mu=\mu_m$:

$$\left.\begin{array}{l} Y''=-\mu_m Y=m^2 \\ Y(0)=0 \end{array}\right\} \quad Y(x)=A\cosh(my)+B\sinh(my)\underset{\substack{\uparrow \\ Y(0)=0\Rightarrow A=0}}{=}B\sinh(my)$$

Solucions en variables separades de $(\mathrm{I})'$: $u_m(x,y)=\sin(mx)\sinh(my),\ m\geq 1$

Busquem solució de $(\mathrm{I})$ de la forma:

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m u_m(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coefs. a determinar!}}}{a_m}\sin(mx)\sinh(my)$$

Cal:

$$f(x)=u(x,2\pi)=\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{a_m\sinh(2\pi m)}_{=\,b_m}\sin(mx), \quad x\in[0,\pi]$$

$b_m \leftarrow$ Coefs. de Fourier del desenvolupament en sinus de $f(x)$ en $[0,\pi]$

Exemple: $f(x)=\pi-x$

$$b_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{T}x\right)dx\underset{\substack{\uparrow \\ T=\pi}}{=}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(mx)\,dx\underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrar per parts}}}{=}\frac{2}{m}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\pi-x \\ dv=\sin(mx)\,dx \end{array}\right\}$$

Així: $a_m=\dfrac{2}{m\sinh(2\pi m)} \Rightarrow \boxed{u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\sinh(2\pi m)}\sin(mx)\sinh(my)}$