Separació de Variables en l'eq. de la Calor

$$\left.\begin{array}{ll} U_t - K^2 U_{xx} = 0\,, \quad U = U(x,t),\ K>0 & \\ x \in [0,\pi]\,,\ t \geq 0 & \text{domini} \\ U(x,0) = f(x) & \text{condició inicial}\,,\ x\in[0,\pi] \\ \left.\begin{array}{l} U_x(0,t) = 0 \\ U_x(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{condicions de frontera} \\ t\geq 0 \text{ de tipus Neumann} \\ \text{(no flux de calor pels extrems)}\end{array} \end{array}\right\} (*)$$

Busquem solucions en variables separades, $U(x,t) = X(x)\,T(t)$ de l'equació $(*)'$:

$$\left.\begin{array}{l} U_t - K^2 U_{xx} = 0 \\ U_x(0,t) = 0 \\ U_x(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} (*)'$$

obtenim:

$$U_x(0,t) = 0 \iff X'(0)\,T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X'(0) = 0}$$

$$U_x(\pi,t) = 0 \iff X'(\pi)\,T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X'(\pi) = 0}$$

A més:

$$X \cdot T' - K^2 X'' T = 0 \iff \boxed{\frac{X''}{X} = \frac{T'}{K^2 T} = \mu \equiv \text{Const.}}$$

· Considerem l'eq. per X (P.V.F. homogeni):

$$\left.\begin{array}{l} X'' = \mu X \\ X'(0) = X'(\pi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Vap's del P.V.F.: } \mu = \mu_n = -n^2,\ n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{fup's del P.V.F.: } X_n(x) = \cancel{A} \cos(nx) \end{array}$$

(fem $A=1$)

· Eq. per T (només per a $\mu = \mu_n$):

$$T_n' = K \mu_n T_n = -K^2 n^2 T_n \Rightarrow T_n(t) = \underset{(\text{fem } A=1)}{\cancel{A}}\, e^{-K^2 n^2 t}$$

Així, les solucions en variables separades són:

$$U_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = e^{-K^2 n^2 t} \cos(nx), \quad n \geq 0.$$

· Resolem l'eq. (*) per a $u(x,t)$ buscant $\{a_n\}$ t.q.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-K^2 n^2 t} \cos(nx)$$

compleixi: $\quad f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \ x \in [0, \pi]$

Així doncs, els coef's $\{a_n\}$ són els coef's de Fourier del desenvolupament de $f(x)$ en cosinus en l'interval $[0, \pi]$.

<u>Recordem</u>: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$, $x \in [0, T]$ si:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx \ ; \quad \underset{(n \geq 1)}{a_n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

· <u>Exemple</u> (fàcil): En el nostre cas fem $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

Llavors: $1 + \cos(2x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$

si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = 0$ si $n \geq 3$.

Solució de (*): $\boxed{u(x,t) = 1 + e^{-4K^2 t} \cos(2x)}$