

Exemple Pei Conservació equacions

- En algunes adps és possible de fimir centes expressions que ens donem, p.ex., l'energia mecànica del sistema o la calor total del sistema i que, sota centes condicions, es mantenen constants (o creixen o decreixen) al llarg del temps (tot depèn del signe de la derivada).

• En el següent exemple veurem la conservació de l'energia mecànica per l'equació d'ones amb condicions Neumann homogènies a la frontera.

- Exemple: $u(x, t)$ solució de

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], \quad t \geq 0, \quad c > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \\ u_t(x, 0) = g(x) & \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(L, t) = 0 \end{cases} \quad t \geq 0$$

• Definim l'energia del sistema:

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2c^2} \int_0^L u_t^2(x, t) dx}_{\text{Energia cinètica}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L u_x^2(x, t) dx}_{\text{Energia elàstica}}$$

• Verrem: $E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = E(0)$ és constant al llarg del temps.

$$E(t) = \frac{1}{2c^2} \int_0^L u_t^2(x,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2(x,t) dx$$

Lavors:

$$E'(t) = \frac{1}{2c^2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2(x,t)] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} [u_x^2(x,t)] dx =$$

entrem la derivada respecte t dins de la integral

$$= \frac{1}{2c^2} \int_0^L 2u_t(x,t) \cdot u_{tt}(x,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L 2u_x(x,t) u_{xt}(x,t) dx$$

usam l'equació per substituir $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$$= \int_0^L [u_t(x,t) u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) \cdot u_{xt}(x,t)] dx$$

- L'expressió que queda dins de la integral és una derivada exacta respecte de x :

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_t(x,t) u_x(x,t)] = u_t(x,t) \cdot u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) \cdot u_{xt}(x,t).$$

- Finalment:

$$E'(t) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} [u_t(x,t) u_x(x,t)] dx \stackrel{\text{Regla de Barrow}}{=} \left[u_t(x,t) \cdot u_x(x,t) \right]_{x=0}^{x=L}$$

$$= u_t(L,t) \cdot \underbrace{u_x(L,t)}_{\substack{= \\ \text{condicions frontera} \\ 0}} - u_t(0,t) \cdot \underbrace{u_x(0,t)}_{\substack{= \\ 0}} = 0$$

• Hem vist $E'(t) = 0$, $\forall t \geq 0$

• Per tant $E(t) = E(0)$, $\forall t \geq 0$

• Fent $t = 0$ en la definició de $E(t)$:

$$E(0) = \frac{1}{2c^2} \int_0^L u_t(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2(x, 0) dx$$

• Usant les condicions inicials:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \Rightarrow u_x(x, 0) = f'(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

• obtenim:
$$E(0) = \frac{1}{2c^2} \int_0^L (g(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L (f'(x))^2 dx$$