- <u>Exemple</u>: Resoleu:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x + \sin t & \leftarrow \text{Equació Corda vibrant } (c=1) \text{ No homogènia} \\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 & \leftarrow \text{Corda longitud infinita} \\ u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = 0 & \leftarrow \text{Condicions inicials.} \end{cases}$$

- Com que l'equació és <u>no homogènia</u>, llavors No podem usar directament la fórmula de D'Alembert.

- Estrategia:

(i) Buscar $v(x,t)$ una solució particular de la edp no homogènia (no cal que verifiqui les condicions inicials)

(ii) Fer un canvi de funció incògnita que redueixi l'equació al cas homogeni i aplicar D'Alembert.

$\boxed{\text{Pas 1}}$ Busquem $v(x,t)$ solució particular de $u_{tt} - u_{xx} = \cos x + \sin t$

<u>Indicació</u>: Busquem $v(x,t) = \alpha(x) + \beta(t)$

$$v_{tt} - v_{xx} = \beta''(t) - \alpha''(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{volem}}}{=} \cos x + \sin t$$

triem $\alpha(x)$ i $\beta(t)$ t.q.:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''(x) = -\cos x \\ \beta''(t) = \sin t \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha(x) = \cos x \\ \beta(t) = -\sin t \end{array}\right.$$

$$\boxed{v(x,t) = \cos x - \sin t}$$

$\boxed{\text{Pas 2}}$ Fem un canvi de funció incògnita per homogenitzar l'equació:

$$\underbrace{W(x,t)}_{\text{Nova funció incògnita}} = \underbrace{U(x,t)}_{\text{Solució equació inicial}} - \underbrace{V(x,t)}_{\text{Solució particular Pas 1}}$$

Quina equació i quines condicions inicials verifica $W(x,t)$?

- $W_{tt} - W_{xx} = \underbrace{(U_{tt} - U_{xx})}_{= \cos x + \sin t} - \underbrace{(V_{tt} - V_{xx})}_{= \cos x + \sin t} = 0$

- $W(x,0) = U(x,0) - V(x,0) = 0 - (\cos x - \sin(0)) = -\cos x$

- $W_t(x,0) = U_t(x,0) - V_t(x,0) = 0 - (-1) = 1$

$V_t(x,t) = -\cos t$

$V_t(0,0) = -1$

Pas 3 Resolem l'equació per $W(x,t)$ per D'Alembert.

$$\begin{cases} W_{tt} - W_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ W(x,0) = f(x) = -\cos x \\ W_t(x,0) = g(x) = 1 \end{cases}$$

← Eq. Corda vibrant homogènia (Corda infinita) $\underline{\underline{c=1}}$

← Condicions inicials

• D'Alembert:

$$W(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+c\cdot t) + f(x-c\cdot t)\right] + \frac{1}{2\cdot c}\int_{x-c\cdot t}^{x+c\cdot t} g(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos(x+t) - \cos(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(x+t) + \cos(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left[(x+t) - (x-t)\right] =$$

$$= -\cos x \cdot \cos t + t$$

Pas 4 Solució final: $\boxed{U(x,t) = V(x,t) + W(x,t) = -\sin t + \cos x - \cos x \cdot \cos t + t}$