Equació de la Calor

- Equació que modela l'evolució de la temperatura d'un cos n-dimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ homogeni:

$$\begin{cases} u_t - k^2 \Delta u = F(x,t), & u = u(x,t),\ k>0 \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,\ t \geq 0 & \leftarrow \text{domini} \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \Omega & \leftarrow \text{temperatura inicial } (t=0) \text{ (condició inicial)} \end{cases}$$

On: (i) $F(x,t)$ Entrada o sortida de calor en Ω.

(ii) $\Delta u = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}$ Laplacià

(iii) $k>0$ constant que té a veure amb la propagació de la calor en el medi Ω.

(iv) Cal afegir condicions de frontera en $\underbrace{\partial\Omega}_{\text{(frontera de } \Omega)}$

- <u>Cas 1D</u>: Equació de l'evolució de la temperatura en una barra homogènia en que la temperatura és la mateixa en tots els punts d'una secció transversal donada:

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = F(x,t), \quad u = u(x,t), \quad k > 0 \\ x \in [0,L], \quad t \geq 0 \leftarrow \text{barra de longitud } L \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,L] \leftarrow \text{temperatura inicial de la barra} \end{cases}$$

(i) $F(x,t)$ indica la calor que entra o surt transversalment de la barra (o millor pensar en un fil o filferro). Si $F \equiv 0$ llavors la barra només pot tenir intercanvi de calor pels extrems.

(ii) Condicions frontera: P. ex. $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ (Neumann homogeni) vol dir extrems aïllats.