L'equació de Laplace

- Equació d'ones n-dimensional: Equació que modela el moviment oscil·latori d'un cos n-dimensional sotmès a una força externa $G(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u + G(x) \\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \end{cases}$$

(Ω domini de $\mathbb{R}^n$)

on:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

operador de Laplace o Laplacià

- Solucions estacionaries (o d'equilibri) de l'eq. d'ones:

Corresponen a demanar $u_{tt} = 0$. obtenim:

$$\Delta u = F(x), \quad u = u(x), \quad x \in \Omega \quad \text{(Equació de Poisson)}$$

on $F(x) := -G(x)/c^2$

En el cas $F \equiv 0$, obtenim: $\Delta u = 0$ (Equació de Laplace)

- Cas 2-dimensional:

Eq. de Poisson: $u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)$

Eq. de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.