

# Separació Variables equació d'ones

Exemple: Equació de la corda vibrant per una corda de longitud  $L = \pi$  i amb condicions de frontera

Dirichlet homogènies.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u = u(x, t) \quad \leftarrow \text{Eq. d'ones} \quad (c > 0)$$

$x \in [0, \pi], \quad t \geq 0 \quad \leftarrow \text{domini: corda de longitud } \pi$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{array} \right\} x \in [0, \pi] \quad \leftarrow \text{condicions inicials.} \\ \text{demandes?} \quad (f(x), g(x) \text{ funcions})$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \end{array} \right\} t \geq 0 \quad \leftarrow \text{condicions frontera tipus Dirichlet homogènies.}$$

Usarem aquest exemple per il·lustrar el mètode de Separacions de variables, vàlid per resoldre edps lineals separables.

**Per pas** Trenguem (\*) en dues equacions auxiliars, cadascuna de les quals només tingui una condició no homogènia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_t t - c^2 \bar{u}_{xx} = 0 \\ \bar{u}(x, 0) = f(x) \\ \bar{u}_t(x, 0) = 0 \\ \bar{u}(0, t) = 0 \\ \bar{u}(\pi, t) = 0 \end{array} \right. \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_t t - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = 0 \\ \tilde{u}_t(x, 0) = g(x) \\ \tilde{u}(0, t) = 0 \\ \tilde{u}(\pi, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\tilde{*})$$

- La solució de (\*) és  $\bar{u}(x, t)$  i la de  $(\tilde{*})$  és  $\tilde{u}(x, t)$ .
- Per principi de Superposició de solucions per edps lineals, la solució de (\*) és  $u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \tilde{u}(x, t)$

Atenció: Em els exemples concrets que veurem, per simplificar a quest 1er pas no caldrà fer-lo.

- Exemple: Fem  $g \equiv 0$  en (\*)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u = u(x, t), \quad c > 0.$$
$$x \in [0, \pi], \quad t \geq 0$$

$$(*) \left. \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{array} \right\} x \in [0, \pi]$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \end{array} \right\} t \geq 0$$