Mètode de les funcions de Lyapunov

- Mètode "Complementari" al mètode de linealització per estudiar l'estabilitat dels punts fixos dels sistemes no lineals.

- <u>Suggerència</u>: Per "defecte" useu el mètode de linealització per estudiar l'estabilitat dels punts fixos. Només quan el mètode de linealització falla, plantejeu-vos usar el mètode de les funcions de Lyapunov... A menys que l'enunciat ho demani explícitament, clar!

– <u>Def.</u>: Sigui $V(\bar{X})$ una funció definida en un entorn del punt $\bar{X}_0 \in \mathbb{R}^n$. Direm que $V(\bar{X})$ és:

(a) Definida $\left\{\begin{array}{l}\text{Positiva}\\ \text{negativa}\end{array}\right\}$ en $\bar{X}_0$ si: $V(\bar{X}_0)=0$ i $\left\{\begin{array}{l}V(\bar{X})>0\\ V(\bar{X})<0\end{array}\right\}$

si $\bar{X} \simeq \bar{X}_0$ (propera a $\bar{X}_0$) però $\bar{X} \neq \bar{X}_0$.

(b) Semi-definida $\left\{\begin{array}{l}\text{Positiva}\\ \text{negativa}\end{array}\right\}$ en $\bar{X}_0$ si: $V(\bar{X}_0)=0$ i $\left\{\begin{array}{l}V(\bar{X})\geq 0\\ V(\bar{X})\leq 0\end{array}\right\}$

si $\bar{X} \simeq \bar{X}_0$.

- <u>Comentaris</u>:

(i) V definida $\begin{Bmatrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{Bmatrix} \Rightarrow V$ semi-definida $\begin{Bmatrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{Bmatrix}$

(ii) La majoria de funcions no són ni definides ni semi-definides

(iii) Interpretació de V definida positiva: $V(\bar{X})$ mesura la distància del punt $\bar{X}$ al punt $\bar{X}_0$

- <u>Exemples</u>:

(a) $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ és "<u>la funció</u>" definida positiva en $(0,0)$.

(b) $V(x,y) = 0$ és semi-definida positiva i negativa simultàniament

(c) $V(x,y) = x \cdot y$ no és definida ni semi-definida en $(0,0)$

(d) $V(x,y) = x^2 + y^4 + x^2y + y^4x$ és definida positiva en $(0,0)$

- **Teorema** (Mètode funcions de Lyapunov)

- Sigui $\bar{X}_0$ un punt fix del sistema $\bar{X}' = F(\bar{X})$
- Sigui $V(\bar{X})$ una funció C^1 definida positiva en $\bar{X}_0$
- Definim: $W(\bar{X}) = \langle \operatorname{grad} V(\bar{X}), F(\bar{X}) \rangle$ (producte escalar)

1. $W(\bar{X})$ def. posit. en $\bar{X}_0 \Longrightarrow \bar{X}_0$ és I (de fet $\bar{X}_0$ és R)
2. $W(\bar{X})$ def. negat. en $\bar{X}_0 \Longrightarrow \bar{X}_0$ és AE
3. $W(\bar{X})$ semi-def. negat. en $\bar{X}_0 \Rightarrow \bar{X}_0$ és E (pot ser, o no, AE)
4. $W(\bar{X})$ semi-def. posit. en $\bar{X}_0 \Rightarrow \bar{X}_0$ no pot ser AE

En relació als casos 3 i 4 tenim el següent afegit:
Si W és semi-def. posit./negat. i el conjunt de nivell $\{W=0\}$ no conté cap trajectòria del sistema, llavors $\bar{X}_0$ és R/AE.

- Comentaris:

(i) Si és el cas que $W(\bar{X})$ és semi-definida negativa en $\bar{X}_0$ llavors és diu que $V(\bar{X})$ és una funció de Lyapunov del sistema $\bar{X}' = F(\bar{X})$

(ii) Important: En el cas concret en que $W \equiv 0$, llavors $\bar{X}_0$ és E però no AE. De forma més precisa, si $W \equiv 0$ llavors la funció $V(\bar{X})$ és constant sobre cadascuna de les solucions de $\bar{X}' = F(\bar{X})$. Llavors, és diu que $V(\bar{X})$ és una quantitat conservada o integral primera de $\bar{X}' = F(\bar{X})$.
En el cas concret $n=2$ (sistema d'edo's en el pla), les corbes de nivell $\{V = \text{const.}\}$ entorn de $\bar{X}_0$ són corbes tancades que envolten el punt: El punt $\bar{X}_0$ està envoltat per solucions periòdiques del sistema.