(30) Considerem l'edo no lineal de segon ordre $x'' = -b\sin x - a x'$, on $a \geq 0$, $b > 0$ són paràmetres. Estudieu l'estabilitat dels seus punts d'equilibri aplicant el mètode de linealització i, quan sigui necessari, el mètode de les funcions de Lyapunov usant la funció

$$V(x,y) = y^2/2 + b(1-\cos x)$$

- El 1er que cal fer és escriure l'equació com un sistema de 1er. ordre equivalent, fent $y = x'$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= y := f(x,y) \\ y' &= -b\sin x - a y := g(x,y) \end{aligned}\right\}$$

Els punts fixos són els zeros de $f(x,y) = g(x,y) = 0$ cal doncs $y=0$ i $\sin x = 0$. Com que l'equació és 2π-periòdica en x només hem de considerar $(0,0)$ i $(\pi,0)$.

- Sistema linealitzat en el punt fix (x_0,y_0):

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad A = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b\cos x_0 & -a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Cas } (0,0)}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} D &= \det A = b > 0 \\ T &= \operatorname{tr} A = -a \leq 0. \end{aligned}$$

Si $D > 0$ i $T < 0$ el sistema pot ser un node propi estable, node impropi estable o un focus estable depenent del signe del discriminant $\Delta = D^2 - 4T$ $(>0, =0, <0)$. En tots aquests casos és dona un sistema lineal atractor (AE) que implica que $(0,0)$ és atractor en el sist. no lineal.

· Per tant, només queda pendent el cas $a=0$, pel qual $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b & 0\end{pmatrix}$ té vap's $\pm\sqrt{b}\,i$ complexos conjugats de part real zero $\Rightarrow$ sist. linealitzat tipus centre i no decideix l'estabilitat del $(0,0)$ en el no lineal.

Usem doncs que $V(x,y) = \frac{y^2}{2} + b(1-\cos x) \underset{\uparrow}{\simeq} \frac{y^2}{2} + \frac{b\,x^2}{2} + \dots$

$\cos x = 1 - x^2/2 + \dots$

es definida positiva en $(0,0)$ i:

$$\dot{V} \underset{(a=0 \text{ en } f,g)}{=} \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot g = (b\cdot \sin x)\cdot y + y\cdot(-b\sin x) = 0$$

Per tant $\dot{V}=0 \Rightarrow V(x,y)$ és una quantitat conservada del sistema i com que $V(x,y)$ és definida positiva les seves corbes de nivell $V(x,y) = \text{const.}$, amb $\text{const.} \simeq 0^+$, són corbes tancades entorn $(0,0)$ que corresponen a òrbites periòdiques que envolten el punt. Per tant, per $a=0$ el punt $(0,0)$ és estable (no AE) pel sistema no lineal (si $b>0$).

$\boxed{\text{Cas } (\pi,0)}$

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ b & -a\end{pmatrix}$ $D=-b<0 \Rightarrow$ Per a qualsevol valor de $a \geq 0$ i $b>0$ el punt és de tipus sella, i per tant A té un vap $>0 \Rightarrow (\pi,0)$ és un pt. fix inestable del sistema no lineal.