- **Teorema** (Evolució del volum sota les solucions d'una edo)

- $\boxed{X' = F(t, X)}$ edo n-dimensional
- $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funció C^1

$$(t, X) \longmapsto F(t, X) = (F_1, \dots, F_n)$$

- Definim: $\operatorname{div}(F)(X, t) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ (divergencia F)

Llavors: En aquells punts X i en aquells instants t on $\operatorname{div}(F)$ és positiva / negativa / zero, llavors les solucions del sistema d'edo's $X' = F(t, X)$ expandeix / contrau / preserva volum (localment) respectivament.

- Cas particular de sistemes lineals:

$$\bar{X}' = A\bar{X}, \quad A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$$

Llavors, la divergència del sistema és la traça de A

- Exemple:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$tr(A) = a + d$.

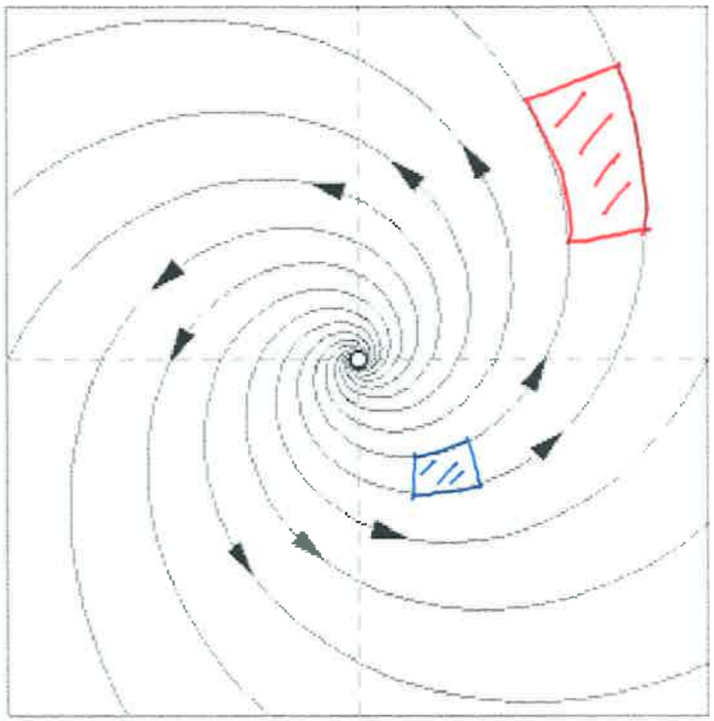
Cas 1: $a + d > 0 \Rightarrow$ El sistema expandeix àrea

Cas 2: $a + d < 0 \Rightarrow$ El sistema contrau àrea.

Cas 3: $a + d = 0 \Rightarrow$ El sistema conserva àrea.

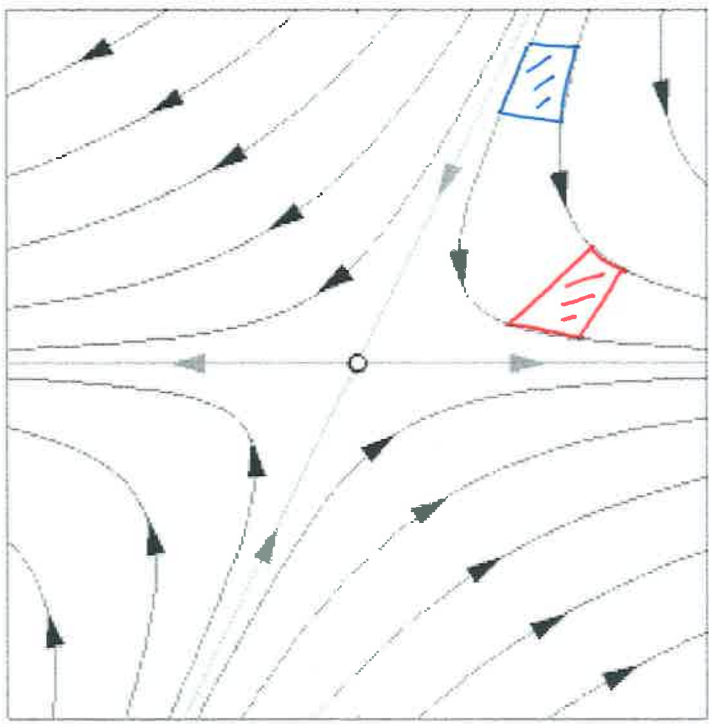
- **Exemple:** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad tr(A) = 1 \Rightarrow$ Les solucions expandeixen àrea

- El sistema és un focus inestable.
- Ara, l'àrea del domini inicial (///) creix quan la movem al llarg de les solucions (///)



- <u>Exemple:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad tr(A) = 0 \Rightarrow$ Les solucions conserven àrea.

- El sistema és una sella.
- Si movem el domini inicial (///) al llarg de les solucions, al cap d'un temps es transforma en (///) que ha de tenir la mateixa àrea



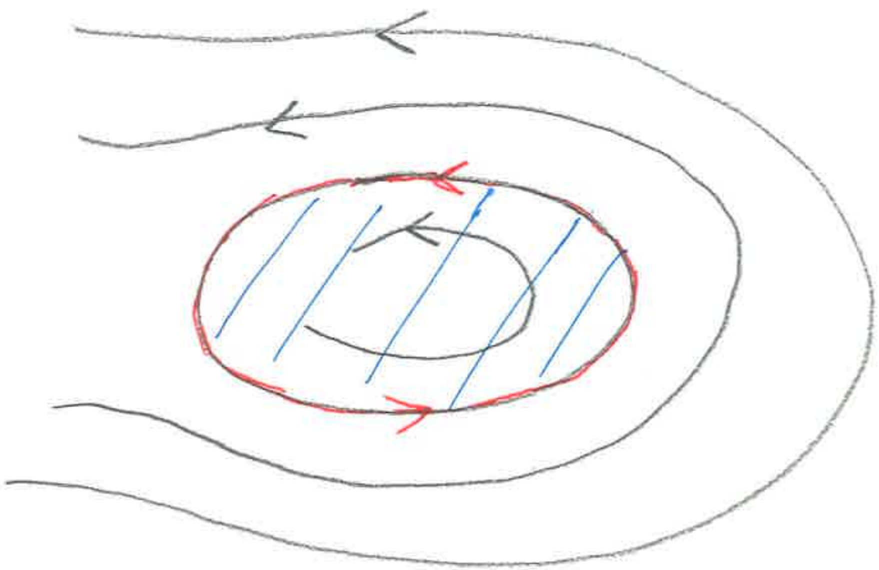
– Conseqüència del teorema d'evolució del volum

- Considerem el sistema autònom en el pla

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}\right\} \quad f, g \in C^1(U)$$

- La seva divergència és: $\operatorname{div}(F) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.
- Llavors: Si $\operatorname{div}(F)$ té signe constant en U ($\operatorname{div}(F) > 0$ ó $\operatorname{div}(F) < 0$), llavors l'edo no pot tenir **cap** solució periòdica no trivial (que no sigui un punt fix) que tanqui un domini D completament contingut en U.

- <u>Interpretació</u>: L'òrbita d'una solució periòdica de $\left.\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}\right\}$ dóna lloc a una corba tancada en el pla encerclant un domini tancat D.



- solució periòdica
- /// domini D encerclat per la solució periòdica

Ni les solucions que tenen condicions inicials dins de D poden sortir fora de D ni les que tenen condicions inicials fora de D poden entrar dins D.

- Conclusió: Les solucions de l'edo preserven el domini D i, per tant, preserven la seva àrea.
- Hi ha dues possibilitats per això:

(1) divergència $= 0 \Rightarrow$ Les solucions preserven àrea arreu.

(2) divergència > 0 en alguns punts dins D i < 0 en d'altres, distribuïts de forma que l'àrea total dins D es preservi.

- El que no pot ser és que la divergència tingui signe constant dins D (positiu o negatiu).
- Per tant, si la divergència té signe constant, llavors No pot existir cap solució periòdica.