Sistema de Van der Pol

$$\boxed{x'' = a\cdot(1-x^2)\cdot x' - x}$$

- Cas $a=0$: Oscil·lador harmònic $x'' = -x$
- Cas $a\neq 0$: Oscil·lador harmònic no lineal.

- 1er pas: Sistema de 1er. ordre equivalent

$$\begin{cases} x' = y & := f(x,y) \\ y' = a\cdot(1-x^2)\,y - x & := g(x,y) \end{cases}$$

- 2on. pas: Punts fixos sistema 1er. ordre

$$f(x,y)=0 \Longrightarrow y=0$$
$$\Downarrow$$
$$g(x,y)=0 \Longrightarrow x=0$$

$\boxed{(0,0) \text{ és l'únic pt. fix}}$

- 3er pas: Sistema linealitzat en $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2axy-1 & a(1-x^2) \end{pmatrix}$$

La matriu del sist. linealitzat en $(0,0)$ és $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}$

- 4art. pas: Estabilitat de $(0,0)$ en el sistema no lineal via el sistema linealitzat si $\boxed{a \neq 0}$

$T = tr(A) = a \equiv$ suma vap's

$D = \cancel{det}\ (A) = 1 \equiv$ producte vap's

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - T \cdot \lambda + D = \lambda^2 - a \cdot \lambda + 1 \equiv$ polinomi característic

$\lambda_\pm = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2} \equiv$ vap's de A

Vap's reals diferents i negatius | Vap's complexos conjugats. Part real $a/2 < 0$ | Vap's complexos cjgts. Part real $a/2 > 0$ | Vap's reals diferents i positius

$a = -2$ | $a = 0$ | $a = 2$

$D = 1 > 0$
$T = a < 0$

$a = -2$ ↑ Vap's dobles $\lambda_{\pm} = -1$

$a = 2$ ↑ Vap's dobles $\lambda_{\pm} = 1$

$D = 1 > 0$
$T = a > 0$

- Cas $a < -2 \Rightarrow$ El sist. linealitzat té tots els vap's $< 0 \Rightarrow$ AE
- Cas $a = -2 \Rightarrow$ " " " " tots " " $< 0 \Rightarrow$ AE
- Cas $a \in (-2, 0) \Rightarrow$ " " " " tots " " amb $Re(\lambda) < 0 \Rightarrow$ AE
- Cas $a \in (0, 2) \Rightarrow$ " " " " tots " " " $Re(\lambda) > 0 \Rightarrow$ R
- Cas $a = -2 \Rightarrow$ " " " " tots " " $> 0 \Rightarrow$ R
- Cas $a > 2 \Rightarrow$ " " " " tots " " $> 0 \Rightarrow$ R