Equacions Diferencials Ordinàries (edo's)

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

1 d'abril de 2016

Pre-requisits bàsics

(I) Resolucio d'edo's 1-dimensionals (Càlcul 1)

- Edo's separables: $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Edo's lineals 1-dimensionals: $x' = a(t)x + b(t)$

$$x(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{\int a(t)dt} \cdot c}_{\text{Solució edo homogènia}} + \underbrace{\mathrm{e}^{\int a(t)dt} \int b(t)\, \mathrm{e}^{-\int a(t)dt} dt}_{\text{Solució particular edo no homogènia (variació de les constants)}}$$

(II) Resolució de sistemes d'edo's lineals de dimensió n a coeficients constants $X' = A\,X$ a partir dels valors i vectors pròpis de $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (Àlgebra):

- $\vec{v}$ vep de A de vap $\lambda \Longrightarrow X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\vec{v}$ solució de $X' = A\,X$

(III) Resolució d'edo's lineals de segon ordre a coeficients constants $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ a partir de les arrels de la seva equació característica $a\,m^2 + b\,m + c = 0$ (Àlgebra).

Definició (definició informal d'equació diferencial)

Una equació diferencial és qualsevol equació on les incògnites són una o més funcions, depenents d'una o més variables (independents), i que apareixen relacionades en l'equació mitjançant les seves derivades (cas funcions d'una variable) o les seves derivades parcials (cas funcions de més d'una variable).
Els casos més importants són:

1. **Tema 2:** *Equacions Diferencials Ordinàries (edo's)*
   (funcions incògnita depenents d'una única variable independent)
2. **Tema 3:** *Equacions en Derivades Parcials (edp's)*
   (funcions de més d'una variable independent)

1. **Càlcul de les primitives d'una funció $f(x)$ donada:**

Busquem una funció $y = y(x)$ tal que $\boxed{y' = f(x)}$ (edo 1er ordre)

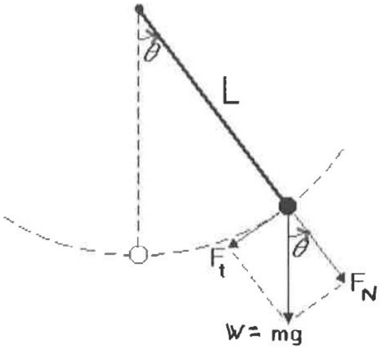
- x una única variable independent, $' = \dfrac{d}{dx}$
- $y = y(x)$ una única funció incògnita.

2. **L'equació logística:** $\boxed{x' = r \cdot x \cdot \left(1 - \dfrac{x}{K}\right)}$ (edo 1er ordre)

- t variable independent, $' = \dfrac{d}{dt}$; $x = x(t)$ funció incòginita.
- $x(t)$ modela l'evolució en el temps d'una població quan els recursos són finits.
- $r > 0$ taxa de creixement "natural"; $K > 0$ depèn dels recursos.
- Si $x(t)$ és la solució amb $x(0) > 0$, llavors:

$$x(t) = \frac{K \cdot x(0) \mathrm{e}^{rt}}{K + x(0) \cdot (\mathrm{e}^{rt} - 1)}, \qquad \lim_{t \to +\infty} x(t) = K$$

L'equació pèndol matemàtic: $\boxed{\theta'' = -\frac{g}{L}\sin\theta}$ (edo 2on ordre)



- L longitud de la barnilla.
- θ àngle barnilla amb la vertical.
- m massa; g gravetat; $w = mg$ pes.
- $F_T = w\sin\theta$ component tangencial del pes.
- $F_N = w\cos\theta$ component normal.
- t variable independent.
- $\theta = \theta(t)$ funció incògnita.

Equació que modela les oscil·lacions d'una barnilla rígida, indeformable i de massa menyspreable, que penjem per una anella d'un dels seus extrems, de forma que pot oscil·lar lliurement i sense fricció en un pla paral·lel a la vertical. De l'altre extem hi penjem una massa puntual sotmesa a una gravetat constant.

4. **Les equacions de Lotka-Volterra:**

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= Ax - Bx \cdot y \\ y' &= -Cy + Dx \cdot y \end{aligned}}$$ (sistema edo's 1er odre i dimensió 2)

- t variable indep., $x = x(t)$ i $y = y(t)$ dues funcions incòginita.
- A, B, C, D constants positives
- Model ecològic depredador-presa on $x(t)$ i $y(t)$ són la densitat de preses i depredadors en l'instant t, respectivament.

5. **Equacions diferencials amb retard:**

Quan la derivada de la funció incògnita en l'instant t depèn del valor de la funció en un instant anterior. P. ex.:

$$\boxed{y'(t) = y(t - r)}$$ (r és el retard)

Una equació amb retard no és una edo. No les estudiarem.

6. **Equacions integro-diferencials:**

La derivada de la funció incògnita en un punt depèn d'una integral que involucra tots els valors de la funció en un interval. P. ex.:

$$\boxed{y'(x) = \int_0^x (1 + y^2(s))ds}$$

No és una edo i no les estudiarem, malgrat en aquest cas concret és equivalent a una edo de 2on ordre: $\boxed{y'' = 1 + y^2, \quad y'(0) = 0}$

7. **L'equació de la calor 3D:** $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}$

• Equació que modela la difusió de la calor en un sòlid $3D$ isòtrop.
• $u = u(x, y, z, t)$ (funció incògnita) dóna la calor o temperatura en el punt (x, y, z) en l'instant t (quatre variables independents).
• És una equació en derivades parcials (edp) de 2on ordre.
Les estudiarem en el darrer tema.

Definició (Sistemes d'edo's)

Un sistema d'edo's de $1er$ *ordre i dimensió* n *en* **forma estàndar** *és:*

$$\boxed{X' = F(t, X)}$$

- $t \in \mathbb{R}$ *és la variable independent,* $\quad {}' = \dfrac{d}{dt}$
- $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *vector de funcions incògnita.*
- $F : \underset{(t,X)}{U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{F(t,X)}{\mathbb{R}^n}$ *funció vectorial de* $n+1$ *variables i* n *components donada ("la que defineix l'equació")* $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \cdots \\ F_n \end{pmatrix}$

Exemple (L'equació de Lotka-Volterra)

$$\left.\begin{array}{rl} x' = & Ax - Bx \cdot y \\ y' = & -Cy + Dx \cdot y \end{array}\right\} \iff X' = F(t, X) = \begin{pmatrix} Ax - Bx \cdot y \\ -Cy + Dx \cdot y \end{pmatrix}$$

on $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Definició (Sistemes autònoms)

Direm que el sistema $X' = F(t, X)$ *és autònom sii.* $F(t, x) = F(X)$ *(*F *no depèn de la variable independent). Direm que* $F(X)$ *és un camp vectorial i* $F(t, X)$ *un camp vectorial que depèn de* t.

Definició (Solució d'un sistema d'edo's)

$X = X(t)$ *és una solució de* $X' = F(t, X)$ *si* $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto X(t)$ *és una funció vectorial definida* $\forall t \in I$ *interval de* $\mathbb{R}$, *derivable en* I, *i tal que* $X'(t) = F(t, X(t))$, $\forall t \in I$.

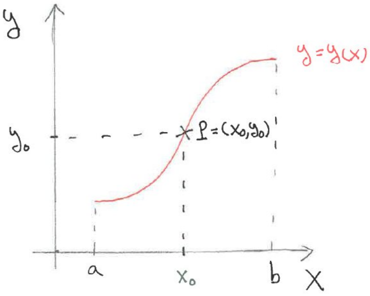
Exemple

1. $x(t) = \mathrm{e}^t$ *és una solució de* $x' = x$ *(i. e.,* $F(t,x) = x$ *).*
2. $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ *és una solució de* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
3. $(x(t), y(t)) = \left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right)$ *és una solució (constant) de les equacions de Lotka-Volterra* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Bx \cdot y \\ -Cy + Dx \cdot y \end{pmatrix}$

Comentari

- *Objectiu estudi edo's: Resoldre-les. Trobar totes les solucions.*
- *Pega: En general no és possible calcular analíticament les solucions d'una edo donada. Només en exemples molt senzills.*
- *Què farem: Enunciar un resultat (teòric) que ens garanteixi que les edo's tenen solucions (malgrat no sapiguem calcular-les) i que ens permeti caracteritzar ("etiquetar") aquestes solucions.*

- **Cas 1: Edo's de 1er ordre 1D** $\boxed{y' = f(x, y)}$ $\left(' = \frac{d}{dt} \right)$



- $y(x)$ una solució de l'edo definida $\forall x \in I = [a, b]$ $\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$
- Pintem la gràfica $y = y(x)$ i triem un punt $P = (x_0, y_0)$ sobre la gràfica $(x_0 \in I, \quad y_0 = y(x_0))$
- Fem el càlcul següent:

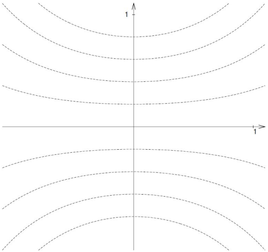
$$\underbrace{y'(x_0)}_{\substack{\text{pendent recta} \\ \text{tangent a} \\ y = y(x) \text{ en } x = x_0}} = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = \underbrace{f(P)}_{\substack{\text{valor que } f \\ \text{assigna} \\ \text{al punt } P}}$$

Interpretació geomètrica (Cas 1): Donada una funció $f(x, y)$ que a cada punt del pla (x, y) li assigna una pendent, una solució de l'edo $y' = f(x, y)$ és una corba en el pla (x, y) tal que en cada punt pel que passa té com a pendent el valor que f assigna a aquell punt.

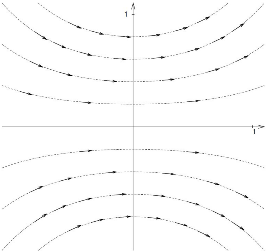
Exemple ($y' = f(x, y) = x \cdot y$)

Edo lineal que té com a solució general $y(x; c) = c\,\mathrm{e}^{x^2/2}, \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

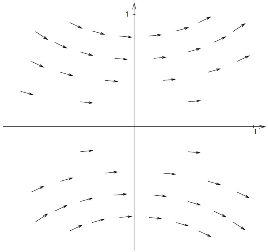
Solucions:



Solucions + pendents:



Pendents:



Podem visualitzar els camps de pendents com llimadures de ferro orientades per un camp magnètic.

- **Cas 2: Sistema d'edo's autònom 2D** $\boxed{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}}$

  - $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ **camp vectorial** associat al sistema.
  - Sigui $(x(t), y(t))$ una solució definida $\forall t \in I = [a,b]$, verificant:

$$x'(t) = f(x(t), y(t)), \qquad y'(t) = g(x(t), y(t))$$

  - $\sigma : \underset{t}{I \subset \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{\sigma(t)=(x(t),y(t))}{\mathbb{R}^2}$ és la corba en el pla xy , parametritzada per t , que recorre aquesta solució.
  - $P = (x_0, y_0) = \sigma(t_0)$ punt sobre aquesta corba, per algun $t_0 \in I$.
  - El vector velocitat de la corba en P és $\vec{v} = (f(P), g(P)) = \vec{F}(P)$.

Interpretació geomètrica: Donat el camp vectorial $\vec{F}(x,y))$, que a cada punt del pla li assigna un vector, llavors una solució del sistema $\boxed{x' = f(x,y),\ y' = g(x,y)}$ és una corba en el pla xy, parametritzada per t , de forma que en cada punt de la corba el seu vector velocitat (tangent a la corba) és igual al valor de $\vec{F}$ en aquell punt.

Exemple (Oscil·lador harmònic)

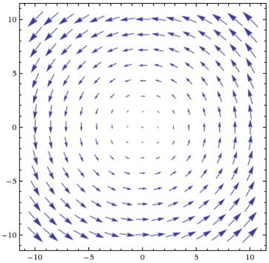
$$x' = f(x,y) = -y, \qquad y' = g(x,y) = x$$

Les seves solucions són

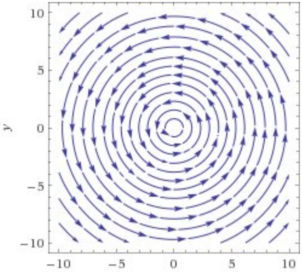
$$x(t) = A\cos t + B\sin t, \quad y(t) = A\sin t - B\cos t, \qquad (A, B \in \mathbb{R}),$$

que recorren corbes en el pla que són circumferències de radi $\sqrt{A^2+B^2}$ *que giren entorn de l'origen amb velocitat angular* $\omega = 1$ *.*

Camp vectorial $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$**:**



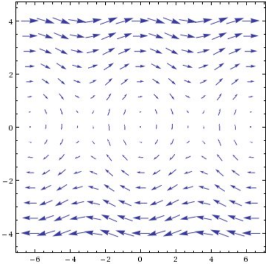
Òrbites solució:



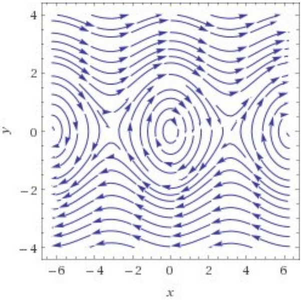
Exemple (Pèndol matemàtic)

$$x' = f(x,y) = y, \qquad y' = g(x,y) = -\sin x$$

Camp vectorial $\vec{F}(x,y) = (y, -\sin x)$:



Òrbites solució:



Comentari

Dues orbites diferents d'un camp autònom no es poden tallar mai. Allà on sembla que es tallin, de fet hi ha un punt d'equilibri separant-les.

Trajectòries vs. Òrbites (cas 2D)

Definició

- *A les solucions* $(x(t), y(t))$ *d'un sistema d'edo's autònom també se les anomena* **trajectòries del sistema**.
- *Si* $(x(t), y(t))$ *és una trajectòria del sistema, llavors la seva* **òrbita** *és el conjunt de punts que recorre aquesta solució.*
- *Així, una* **òrbita** *és una corba en el pla que parametritzada respecte de* t *de forma adequada esdevé solució de l'edo.*
- *Si només coneixem* **l'òrbita**, *llavors sabem per quins punts passa la solució, pero no* **on és** *en cada instant concret.*
- **Òrbita** $\equiv$ **Equació** *en* x, y; **Trajectòria** $\equiv$ **Fórmula** *per* $x(t), y(t)$.

Exemple ($x' = -y, \quad y' = -x$)

$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ *és una* **solució/trajectòria** *del sistema.*
L'òrbita *que recorre aquesta solució és la circumfèrencia d'equació* $x^2 + y^2 = 1$.

Famílies de solucions

Observació

• *Les solucions d'una edo* **no són funcions aïllades**. *De forma natural formen* **famílies** *dependents d'un o més paràmetres.*
• **Motivació:** *La constant d'integració en el càlcul de primitives:*

$$y' = f(x) \text{ (edo)} \implies y(x;c) = c + \int_a^x f(s)\,ds, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ (solucions)}$$

• *Anomerarem* **solució general** *d'una edo a tota familia de solucions que contingui* **totes les solucions** *de l'equació.*
• *El nombre de paràmetres necessaris per representar la solució general d'una edo creix amb la dimensió i també amb l'ordre de l'edo.*

Exemple

$x(y) = A\cos t + B\sin t, \quad y(t) = A\sin t - B\cos t, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$
és la solució general de $x' = -y, \quad y' = x$.

Edo's d'ordre n

Definició (Edo's d'ordre n en forma normal)

$$\boxed{x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})}$$

- $t \in \mathbb{R}$ *és la variable independent,* $\quad ' = \dfrac{d}{dt}$
- $x = x(t) \in \mathbb{R}$ *és (l'ùnica) funció incògnita.*
- $f : U \subset \underset{(t,\,(x,x',\ldots,x^{(n-1)}))}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{f(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)})}{\mathbb{R}}$ *funció donada de* $n+1$ *variables i amb valors a* $\mathbb{R}$ *("la que defineix l'equació").*

Exemple

1. *L'equació del pèndol matemàtic:* $\theta'' = -\dfrac{g}{L}\sin\theta$
2. *L'oscil·lador harmònic de freqüència* ω *:* $x'' = -\omega^2 \cdot x$
3. *L'equació del paracaigudista:* $x'' = -g + \dfrac{k}{m} \cdot (x')^2$

Definició (Solució d'una edo d'ordre n)

Direm que $x = x(t)$ *és una solució de* $x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ *sii.*
$\begin{array}{rcl} x : I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$ *és una funció definida* $\forall t \in I$ *interval de* $\mathbb{R}$, n *cops derivable en* I, *i* $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t))$, $\forall t \in I$.

Exemple

- $\theta(t) = 0$ *(equilibri inferior)* $\theta(t) = \pi$ *(equilibri superior)* *són dues solucions constants del pèndol* $\theta'' = -\frac{g}{L} \sin \theta$.
- $x(t) = h - t\sqrt{\frac{gm}{k}}$ *és una solució de l'equacio del paracaigudista que correspon a caure amb velocitat constant des d'una altura* h.
- $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, $\forall A, B \in \mathbb{R}$ *és la solució general de l'oscil·ador harmònic* $x'' = -\omega^2 \cdot x$.

Tota **edo d'ordre n en forma normal** $x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ es pot re-escriure com un **sistema de 1er ordre i dimensió n** en forma estàndar $X' = F(t, X)$ equivalent.
(Equivalent vol dir que a partir de les solucions d'un tenim les de l'altre i viceversa.)

Exemple (L'equació del paracaigudista $x'' = -g + \frac{k}{m} \cdot (x')^2$)

Fem $\boxed{y=x'}$ *(y és la velocitat). Obtenim el* **sistema de 1er ordre***:*

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -g + \frac{k}{m} \cdot y^2 \end{aligned}} \iff \boxed{X' = F(X)} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $x(t)$ *solució eq. parac.* $\iff X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ *solució sistema.*

• **Cas edo d'ordre n**: $\boxed{x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})}$

Introduïm n noves funcions incògnita:

$$\boxed{x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x^{(n-2)}, \quad x_n = x^{(n-1)}}$$

El sistema de 1er ordre i dimensió n equivalent és $X' = F(t, X)$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1' & = x_2 \\ x_2' & = x_3 \\ & \cdots \\ x_{n-1}' & = x_n \\ x_n' & = f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{array}} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \\ f(t, X) \end{pmatrix}$$

• $x(t)$ solució edo ordre n $\iff X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ solució sistema.

El Problema de Cauchy o Problema de Valors Inicials

• **Objectiu:** Etiquetar les solucions de les edo's de forma que a cada tria de les etiquetes li correspongui **una i només una** solució.

Definició (**PVI** per un sistema d'edo's de 1er ordre i dimensió n)

Donades les **condicions inicials** $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un* **PVI** *consisteix en trobar* $X(t)$ *solució del sistema que passi pel punt* (t_0, X_0) *:*

$$X' = F(t, X) \quad \& \quad X(t_0) = X_0$$

Exemple (**PVI:** $x' = a \cdot x + b \quad \& \quad x(t_0) = x_0 \qquad (a \neq 0)$)

• *Solució general de l'edo:* $x(t) = \mathrm{e}^{a \cdot t} \cdot c - b/a \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

• *Resoldre el* **PVI** *equival a determinar* c *en termes condicions inicials:*

$$x_0 = x(t_0) = \mathrm{e}^{a \cdot t_0} \cdot c - b/a \quad \Longrightarrow \quad c = (x_0 + b/a) \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t_0}$$

• *Única solució* **PVI**: $x(t) = \mathrm{e}^{a \cdot (t - t_0)} \cdot (x_0 + b/a) - b/a$

Exemple

$$PVI: \left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\} \text{ pel sistema d'edo's: } \left\{ \begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array} \right\}.$$

- *Solució general:* $x(t) = A\cos t + B\sin t, \quad y(t) = A\sin t - B\cos t$
- *Determinem* A, B *via les condicions inicials:*

$$x_0 = x(0) = A, \qquad y_0 = y(0) = -B$$

- *Única solució* **PVI***:* $x(t) = x_0\cos t - y_0\sin t, \quad y(t) = x_0\sin t + y_0\cos t$

Definició (**PVI** per l'edo d'ordre n $\quad x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$)

Donades les **<u>condicions inicials</u>** $(\, t_0, (x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)})\,) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un* **PVI** *consisteix en trobar* $x(t)$ *solució de l'edo verificant:*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

Exemple (**PVI:** $x'' + x = 1 \quad \& \quad x(\pi/2) = 0\,, \quad x'(\pi/2) = 2$)

- *Solució general:* $x(t) = 1 + c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- *Derivem la solució general:* $x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$
- *Determinem els valors* $c_1 = -2$ *i* $c_2 = -1$ *via les condicions inicials:*

$$0 = x(\pi/2) = 1 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \qquad 2 = x'(\pi/2) = -c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0$$

- *Única solució* **PVI***:* $x(t) = 1 - 2\cos t - \sin t$
- *Des del punt de vista dinàmic,* $x(t)$ *és la solució de l'edo que en l'instant* $t = \pi/2$ *passa pel punt* $x_0 = 0$ *i té velocitat inicial* $x_0' = 2$.

Observació

Obseveu que en una edo de 2on ordre no cal donar el valor de $x''(t_0)$ *, ja que aquest queda determinat per l'edo i les condicions inicials.*

Exemple (Càlcul de les derivades de la solució en $t = t_0$)

Sigui $x(t)$ *la solució del següent* **PVI***:*

$$x'' = -\sin x \quad \& \quad x(0) = \pi/4, \quad x'(0) = 3$$

No sabem calcular $x(t)$ *pero sí les seves derviades en* $t_0 = 0$*. P. ex.:*

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\sin(x(t)) \\ x'''(t) &= -\cos(x(t)) \cdot x'(t) \\ x^{(iv)}(t) &= \sin(x(t)) \cdot (x'(t))^2 - \cos(x(t)) \cdot x''(t) \end{aligned}$$

LLavors:

$$\begin{aligned} x''(0) &= -\sin(x(0)) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ x'''(0) &= -\cos(x(0)) \cdot x'(0) = -\cos(\pi/4) \cdot 3 = -3\sqrt{2}/2 \\ x^{(iv)}(0) &= \sin(x(0)) \cdot (x'(0))^2 - \cos(x(0)) \cdot x''(0) = (9\sqrt{2} + 1)/2 \end{aligned}$$

Etcètera...

Teorema (Cas sistemes d'edo's de 1er ordre i dimensió n)

- $F : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, X) & \mapsto & F(t,x) \end{array}$ *compleix* $F \in \mathcal{C}^1(U)$.
- $(t_0, X_0) \in U$ *condicions inicials donades.*

Llavors, el **PVI** $\boxed{\begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}}$ *admet una* *<u>única solució local</u>* $X(t)$.

Teorema (Cas edo's d'ordre n)

- $f : U \subset \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (t, (x, x', \ldots, x^{(n-1)})) & \mapsto & f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \end{array}$ *compleix* $f \in \mathcal{C}^1(U)$.
- $(\, t_0, \, (x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}) \,) \in U$ *condicions inicials donades.*

Llavors, el **PVI***:*

$$\boxed{\begin{array}{l} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{array}}$$

admet una *<u>única solució local</u>* $x(t)$.

Comentari (I)

$x(t)$ *solució local* *vol dir* $x(t)$ *definida almenys si* t *és prou proper a* t_0. *En general és molt difícil dir quin és l'interval més gran de valors de t pels quals està definida la solució, ja que pot variar solució a solució i en alguns casos pot ser molt petit.*

Exemple (**PVI:** $x' = 1 + x^2 \quad \& \quad x(0) = 0$)

- *Solució general de l'edo (separable):* $x(t; c) = \tan(t + c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int dt \implies \arctan(x) = t + c$$

- *Resolució del* **PVI**: $0 = x(0) = \tan(c) \implies c = 0.$
- $x(t) = \tan t$ *només està ben definida si* $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *malgrat la funció* $f(t, x) = 1 + x^2$ *que defineix l'edo ho està* $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Comentari (II)

Si $X(t)$ *i* $\widetilde{X}(t)$ *són solucions del sistema d'edo's* **autònom** $X' = F(X)$ *que comencen en el mateix punt* X_0 *però per valors de* t_0 *diferents, llavors* $X(t)$ *i* $\widetilde{X}(t)$ *recorren la mateixa òrbita* *("es persegueixen") mantenint el mateix decalatge en el temps que tenien inicialment:*

$$X(t_0) = \widetilde{X}(t_1) \implies X(t) = \widetilde{X}(t + t_1 - t_0)$$

Conseqüència: *Les òrbites corresponents a dues solucions diferents d'un sistema autònom o bé són la mateixa o bé no poden tallar-se mai.*

Comentari (III)

Si $X(t)$ *i* $\widetilde{X}(t)$ *són solucions d'un sistema* **no aùtonom** $X' = F(t, X)$ *que comencen en el mateix punt* X_0 *però per valors de* t_0 *diferents, llavors són completament diferents: no segueixen la mateixa òrbita.*

Comentari (**IV**)

Si la funció $F(t, X)$ *que defineix l'edo* <u>*és contínua però no és* $\mathcal{C}^1$</u>*,*
llavors **podem perdre l'unicitat de solucions per un PVI donat***.*

Exemple (**PVI:** $y' = 3y^{2/3}$ & $y(0) = 0$)

- $y(t; c) = (t + c)^3 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ *família de solucions de l'edo*

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = 3 \int dt \implies 3y^{1/3} = 3t + c' = 3(t + c)$$

- $y(t) = t^3$ *és* **l'única solucio del PVI dins de la família***.*
- $\tilde{y}(t) = 0$ *també és* **solució del PVI i no forma part de la família***.*
- *Tenim* **existència però no uniciat de solucions d'aquest PVI***.*

(En particular $y(x; c) = (t + c)^3$ *no és la solució general de l'edo.)*

- **Raó:** $f(y) = 3y^{2/3}$ *és* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ *però* $f'(y) = 2y^{-1/3}$ *no està ben definida en* $y = 0$ *i per tant* $f(y)$ *no és* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *.*

Sistemes d'EDO's lineals

Definició

Un sistema d'edo's lineals de dimensió n en forma estàndar és:

$$\boxed{X' = A(t)X + b(t)}$$

- $t \in \mathbb{R}$ *és la variable independent,* $\quad ' = \dfrac{d}{dt}$
- $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *vector de funcions incògnita*
- $A(t) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *i* $b(t) \in \mathbb{R}^n$ *són funcions donades definides* $\forall t \in I$ *(*I *interval de* $\mathbb{R}$*).*
- *En tot el que segueix suposarem que* $A(t)$ *i* $b(t)$ *són almenys funcions contínues en* I*.*

Exemple

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cos t \cdot x - \sin t \cdot y + \mathrm{e}^t \\ y' &= \sin t \cdot x + \cos t \cdot y + \ln t \end{aligned}\right\} \iff X' = A(t)X + b(t)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \ln t \end{pmatrix} \quad I = (0, +\infty)$$

Comentari

1. *Lineal vol dir lineal en X (no implica de cap manera lineal en t).*
2. *Direm que el sistema és homogeni* $\iff \boxed{b(t) \equiv 0}$
3. *Direm que el sistema és a coeficients constants* $\iff \boxed{A(t) \equiv A_0}$
   (i. e., $A(t)$ matriu constant).
   (El fet que el sistema sigui a coeficients constants o no refereix a la matriu $A(t)$ però no a $b(t)$.)

Teorema (Existència i uniciat solucions sistemes edo's lineals)

- $A(\cdot) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & A(t) \end{array}$ $\quad b(\cdot) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & b(t) \end{array}$ *funcions contínues.*
- $t_0 \in I$ i $X_0 \in \mathbb{R}^n$ *condicions inicials donades.*

Llavors, el **PVI** $\boxed{\begin{array}{l} X' = A(t)X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}}$ *admet una* <u>*única solució*</u> $X(t)$ *definida* $\forall t \in I$.

Comentari (Teorema existència i uniciat solucions edo's lineals vs. el cas d'un sistema d'edo's $X' = F(t, X)$ no lineal)

1. *En el cas general ("no linal") cal que* $F(t, X)$ *sigui* $\mathcal{C}^1$ *per poder aplicar el teorema d'existència i unicitat. En el cas lineal només cal que* $A(t)$ *i* $b(t)$ *siguin* $\mathcal{C}^0$.
2. *En el cas general la solució* $X(t)$ *donada pel teorema només està definida* <u>*localment*</u>*. En el cas lineal la solució* $X(t)$ *està definida* <u>*globalment*</u>*, i. e., per a tots els valors de* $t \in I$ *pels quals l'equació té sentit.*

Estructura solucions sistemes lineals: Cas homogeni

Proposició (Solució general d'un sistema homogeni)

$\boxed{X' = A(t)X}$ *sistema d'edo's lineals homogeni i de dimensió n.*
La seva solució general és combinacio lineal de n solucions linealment independents del sistema.

Definició (Conjunt fonamental solucions)

Anomenarem un conjunt fonamental de solucions de $X' = A(t)X$ a tot conjunt de n solucions linealment independents del sistema.

- Sigui $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ un conjunt fonamental de $X' = A(t)X$:

$$\underbrace{X(t)}_{\substack{\text{Solució}\\ \text{general}\\ X' = A(t)X}} = \underbrace{c_1 \cdot X_1(t) + \cdots + c_n \cdot X_n(t)}_{\substack{\text{Combinacio lineal de } n\\ \text{solucions independents}}} \qquad \forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

Comentari

• *Si $X' = A(t)X$ és un sistema donat, en general no sabem calcular les seves solucions (només en alguns casos concrets).*
• *Si suposem que hem pogut calcular n solucions, el que* **sí** *que podem decidir és si formen un conjunt fonamental o no.*

Proposició (Caracterització conjunts fonamentals de solucions)

• *Siguin* $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ n *solucions donades de* $X' = A(t)X$.
• *Sigui* $\Phi(t)$ *la matriu* $n \times n$ *que té per columnes* $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$.
• *Definició:* $\boxed{W(t) = \det(\Phi(t))}$ *és el wronkià de* $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$.

$$\boxed{\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\} \text{ conjunt fonamental } \Longleftrightarrow W(t) \neq 0, \forall t \in I}$$

Definició (Matrius fonamentals)

Anomenarem matriu fonamental de $X' = A(t)X$ a tota matriu $n \times n$ tal que les seves columnes formen un conjunt fonamental de solucions.

Comentari ($\Phi(t)$ matriu fonamental de $X' = A(t)X$)

1. *Les columnes de* $\Phi(t)$ *són solucions* $\iff$ $\boxed{\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)}$
2. *Les columnes de* $\Phi(t)$ *són sols. indep.* $\iff$ $\boxed{\det(\Phi(t)) \neq 0}$
3. *Les sols. de l'edo són combinació lineal de les columnes de* $\Phi(t)$*:*

$$\boxed{\underbrace{X(t)}_{\substack{\text{Solució}\\ \text{general}}} = \underbrace{\Phi(t)\cdot\vec{c}}_{\substack{\text{Matriu fonamental}\\ \text{multiplicada per}\\ \text{vector de constants}}} \quad , \quad \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^n}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

- La solució general és combinació lineal de 2 solucions l. i.
- Anem a veure que $\boxed{X_1(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix},\ X_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} \\ \mathrm{e}^{t^2/2} \end{pmatrix}}$ formen

un conjunt fonamental o, el que és el mateix,

$$\boxed{\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t^2/2} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t^2/2} \end{pmatrix}}$$

Les columnes de $\Phi(t)$ són $X_1(t)$ i $X_2(t)$

és una matriu fonamental del sistema.

$\boxed{\textbf{1er. Pas:}}$ Les columnes de $\Phi(t)$ són solucions de $X' = A(t)X$:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \text{ solució } \iff X_1'(t) = A(t)X_1(t)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} (2-t)2e^t + (2t-2)e^t \\ (1-t)2e^t + (2t-2)e^t \end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}}$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} \text{ solució } \iff X_2'(t) = A(t)X_2(t)$$

$$\iff \begin{pmatrix} te^{t^2/2} \\ te^{t^2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}$$

• **Observació:** Els calculs de la pag. anterior són equivalents a:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^t & te^{\frac{t^2}{2}} \\ e^t & te^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{derivada} \\ \text{matriu}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & e^{\frac{t^2}{2}} \\ e^t & e^{\frac{t^2}{2}} \end{pmatrix}}_{\text{producte de matrius}}$$

2on. Pas: Les columnes de $\Phi(t)$ són solucions independents:

$$\boxed{w(t) = \det(\Phi(t)) = e^{t+t^2/2} \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}}$$

• La solució general del sistema és combinació lineal de $\{X_1(t), X_2(t)\}$:

$$\boxed{X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}$$

Càlcul de les solucions de $X' = A(t)X$

- No existeix cap mètode general de resolució si $A(t)$ depèn de t.
- Si $X' = AX$ és un sistema a coeficients constants llavors sí que és possible resoldre'l a partir dels valors i vectors pròpis de A.
- L'únic mètode que donem per obtenir solucions de $X' = A(t)X$ l'enunciem tot seguit. La pega d'aquest mètode és que només funciona sota condicions molt restrictives, però que es compleixen si $A(t)$ és una matriu constant (i també en d'altres casos!).

Proposició

Sigui $A(t)$ una matriu $n \times n$ (que pot dependre de t) i $\lambda(t)$ un valor propi de $A(t)$ que admet un vector propi $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que no depèn de t. Llavors:

$$\boxed{X(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot \vec{v}}$$

és una solució de $\boxed{X'=A(t)X}$.

Demostracio

• <u>*Què sabem?*</u> $\boxed{X(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot \vec{v}}$ $\boxed{A(t)\,\vec{v} = \lambda(t) \cdot \vec{v}}$

Llavors:

$$X'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int \lambda(t)dt\right) \cdot \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot \vec{v} = \lambda(t) \cdot \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot \vec{v}$$

$$A(t)X(t) = A(t) \cdot \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot \vec{v} = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot A(t)\vec{v} = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)dt} \cdot \lambda(t) \cdot \vec{v}$$

Per tant $\boxed{X'(t) = A(t)X(t)}$

$$\boxed{X' = AX \qquad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{(matriu constant)}}$$

- Resultat bàsic:

$$\boxed{\vec{v} \text{ vep de vap } \lambda \text{ de } A \implies X(t) = e^{\lambda t}\cdot \vec{v} \text{ solucio de } X' = AX}$$

- Cas en que A és una matriu diagonalitzable:

Sigui $\boxed{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}}$ una base de vep's de la matriu A de vap's $\boxed{\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}}$, respectivament. Llavors:

$$\boxed{X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\cdot \vec{v}_1, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t}\cdot \vec{v}_2, \quad \dots, \quad X_n(t) = e^{\lambda_n t}\cdot \vec{v}_n}$$

formen un conjunt fonamental de solucions de $X' = AX$.

Comentari (Cas de vap's complexos de A)

- *Si* $\boxed{\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta}$ *és un vap complex de* A *llavors* $\boxed{\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta}$ *(nombre complex conjugat) també és vap de* A *(els vaps complexos van en parelles i per tant calcularem les solucions associades també en parelles!).*
- *Si* $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ *és un vep (complex) de* A *de vap* $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ *llavors* $\boxed{X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{v}}$ *és una <u>solució complexa</u> de* $X' = AX$*.*
- *Si volem <u>solucions reals</u>* $X' = AX$ *hem de considerar tant <u>la part real com la part imaginaria</u> de* $X(t)$*:*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(X(t)) &= \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) \cdot \mathrm{Re}(\vec{v}) - \sin(\beta t) \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})) \\ \mathrm{Im}(X(t)) &= \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (\sin(\beta t) \cdot \mathrm{Re}(\vec{v}) + \cos(\beta t) \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})) \end{aligned}}$$

són dues solucions <u>reals i independents</u> de $X' = AX$*.*

Comentari (Cas de vap's complexos de A (continuació))

- *Si* $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ *és un vap complex podem escriure:*

$$\underbrace{\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)}_{\textit{part real de } \lambda} \qquad \underbrace{\beta = \mathrm{Im}(\lambda)}_{\textit{part imaginaria de } \lambda}$$

- *Si* $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ *és un vep (complex) de* A *de vap* $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ *llavors*

$$\vec{v} = \mathrm{Re}(\vec{v}) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})$$

- *La solució complexa* $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \vec{v}$ *pren la forma:*

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} \cdot (\mathrm{Re}(\vec{v}) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta t)) \cdot (\mathrm{Re}(\vec{v}) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) \cdot \mathrm{Re}(\vec{v}) - \sin(\beta t) \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})) \\ &\quad \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot (\sin(\beta t) \cdot \mathrm{Re}(\vec{v}) + \cos(\beta t) \cdot \mathrm{Im}(\vec{v})) \end{aligned}$$

- $\{\mathrm{Re}(X(t)), \mathrm{Im}(X(t))\}$ *són dues solucions indep. de* $X' = AX$.

- Cas en que A no és una matriu diagonalitzable:
  - Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un vap doble de A.
  - Si existeixen dos vep's de A de vap λ linealment independents llavors la matriu A diagonalitza i tot és com abans.
  - Malauradament, si A té un vap doble en general no diagonalitza i només podem reduïr-la a la seva forma de Jordan que contindrà una capsa 2×2, de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

    on només el primer segon de la base de Jordan associat a la capsa és un vep, però el primer vector no és un vep.
  - **Qüestió:** Què fem per calcular dues solucions linealment independents de $X' = AX$ quan A no diagonalitza?

Proposició (Solucions independents matriu no diagonalitzable)

• *Sigui* $\lambda \in \mathbb{R}$ *un vap doble de* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

• *Suposem* $\lambda \in \mathbb{R}$ *no diagonalitzable i que per tant la seva forma reduïda de Jordan té una capsa* 2×2 *de la forma* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

• *Siguin* $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ *els vectors d'una base de Jordan de* A *associats a aquesta capsa* 2×2, *complint:*

$$\boxed{A\,\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} \qquad A\,\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

• *Llavors dues solucions linealment independents de* $X' = A\,X$ *són:*

$$\boxed{X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda\, t}(\vec{u} + t \cdot \vec{v}) \qquad X_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda\, t}\vec{v}}$$

Demostracio (Proposició)

- $\boxed{A\,\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}} \implies X_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda\,t}\vec{v}$ *és solució de* $X' = A\,X$ *(vist!).*
- $\boxed{A\,\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \vec{v}} \implies X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda\,t}(\vec{u} + t \cdot \vec{v})$ *és solució ?*

Per una banda:

$$X_1'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}(\vec{u} + t \cdot \vec{v}) + \mathrm{e}^{\lambda\,t}\,\vec{v} = \mathrm{e}^{\lambda\,t}(\lambda\,\vec{u} + \lambda\,t\,\cdot \vec{v} + \vec{v})$$

i per l'altre:

$$A\,X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda\,t}(A\,\vec{u} + t\,A\,\vec{v}) = \mathrm{e}^{\lambda\,t}(\lambda\,\vec{u} + \vec{v} + t\lambda \cdot \vec{v})$$

Per tant, $X_1'(t) = A\,X_1(t)$ *, tal com voliem veure.*

Proposició (Solució general d'un sistema no homogeni)

$\boxed{X' = A(t)X + b(t)}$ *sistema edo's lineals no homogeni de dimensió* n.

- *Sigui* $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ *un conjunt fonamental de solucions del sistema homogeni* $\boxed{X' = A(t)X}$.
- *Sigui* $X_p(t)$ *solució (particular) qualsevol sistema no homogeni.*

La solució general de $X' = A(t)X + b(t)$ *és de la forma:*

$$\boxed{\underbrace{X(t)}_{\text{Solució general}} = \underbrace{X_p(t)}_{\text{Solució particular}} + \underbrace{c_1 \cdot X_1(t) + \cdots + c_n \cdot X_n(t)}_{\text{Solució general edo homogènia}}}$$

Mètode de variació de les constants

Comentari

• *Si volem resoldre un sistema no homogeni cal resoldre primer el sistema homogeni associat.*

• *Un cop resolt el sistema homogeni associat, llavors podem calcular una solució particular del sistema no homogeni de la forma següent.*

Proposició (Mètode de variació de les constants)

Sigi $\Phi(t)$ *una matriu fonamental (coneguda) de* $X' = A(t)X$. *Llavors:*

$$X_p(t) = \Phi(t) \int (\Phi(t))^{-1} \cdot b(t)\, dt$$

dóna una solució particular de $X' = A(t)X + b(t)$

($\int$ indica una primitiva qualsevol de l'expressió de la dreta.)

Demostracio (Variació de les constants)

• $\Phi(t)$ *matriu fonamental de* $X' = A(t)X$ *compleix:*

$$\boxed{\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \qquad \& \qquad \det(\Phi(t)) \neq 0}$$

• *Busquem* $X_p(t)$ *solució particular de la forma* $\boxed{X_p(t) = \Phi(t)\,\vec{u}(t)}$ *on* $\vec{u}(t)$ *és un vector incògnita. Hem d'imposar:*

$$\begin{array}{ccl} X_p'(t) & = & \Phi'(t)\vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}'(t) = \boxed{A(t)\Phi(t)\vec{u}(t) + \Phi(t)\vec{u}'(t)} \\ \| & & \\ A(t)X_p(t) + b(t) & = & \boxed{A(t)\Phi(t)\vec{u}(t) + b(t)} \end{array}$$

Per tal que les dues expressions requadrades coincideixin cal:

$$\Phi(t)\vec{u}'(t) = b(t) \implies \vec{u}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,b(t) \implies \vec{u}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\,b(t)dt$$

Estabilitat dels sistemes d'edo's lineals a coeficients constants

• Codificació: E≡ Estable; AE≡ Asimptòticament Estable o Atractor; I≡ Inestable; R≡ Repulsor.

Teorema (Estabilitat del sistema $\boxed{X' = A\,X \quad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})}$)

(a) *Si algun vap λ de A compleix $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \implies$ El sistema és I*

(b) *Si tots els vap's λ de A compleixen $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \implies$ AE*

(c) *Si tots els vap's λ de A compleixen $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \implies$ R*

(d) *Suposem que tots els vaps λ de A compleixen $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$, però que almenys un d'ells compleix $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Llavors:*

   (d1) *Si tots els vap's λ de A amb $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ són semi-simples, llavors el sistema és E però no AE.*

   (d2) *Si algun vap λ de A amb $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ no és semi-simple, llavors el sistema és I.*

Definició (Vap's semi-simples)

Direm que un vap λ de A és semi-simple si la multiplicitat de λ com a zero del polinomi característic de A (multiplicitat algebraica de λ) coincideix amb el nombre de vep's de vap λ linealment independents de A (multiplicitat geomètrica de λ).

Comentari

- *Tot vap λ de A que sigui simple automàticament és semi-simple.*
- *Si λ és un vap doble de A, llavors λ és semi-simple sí i només sí el bloc 2×2 de la forma de Jordan de A associat a λ és diagonal:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda \text{ vap semi-simple}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda \text{ vap no semi-simple}$$