

- Exemple: Resolou el sistema lineal no homogeni

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \text{ sabent (vist a classe)}$$

que  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{t^2/2} \\ e^t & e^{t^2/2} \end{pmatrix}$  és una matriu fonamental  
del sistema homogeni. Troben la solució del PVI  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Apliquem la fórmula de variació de les constants per trobar una solució particular del sistema no homogeni:

$$\det \Phi(t) = e^{t+t^2/2}, \quad \Phi(t)^{-1} = \frac{1}{e^{t+t^2/2}} \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & -e^{t^2/2} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-t^2/2} & 2e^{-t^2/2} \end{pmatrix}$$

llavors:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_p(t) &= \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t) dt = \Phi(t) \int \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-t^2/2} & 2e^{-t^2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} dt = \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t^2/2} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{t^2/2} \\ e^t & e^{t^2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 + C_1^0 \\ -e^{-t^2/2} + C_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solució general del sistema no homogeni és:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_p(t) + C_1 \mathcal{Z}_1(t) + C_2 \mathcal{Z}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}$$

↑ columns de  $\Phi(t)$  ↑

La solució del PVI s'obté fent:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2e^t \\ -1 + e^t \end{pmatrix}$$