- Exemple: Troben la solució general del sistema següent i resolem el P.V.I. $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x \quad\;\; + e^t \\ y' = x + y + 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

- Sist. homogeni associat: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Polinomi característic: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$

$\lambda = 1$ vap doble (però A no diagonalitza)

- triem $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vector arbitrari i calculem $v = (A - \lambda Id)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Llavors, en particular, v és vep de vap $\lambda = 1$ $(Av = \lambda v)$

- Conjunt fonamental solucions sist. homogeni:

$$\Psi_1(t) = e^{\lambda t}(u + tv) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Psi_2(t) = e^{\lambda t} \cdot v = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Matriu fonamental sist. homogeni: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$

- Mètode de variació de les consts. per calcular una solució particular del sist. no homogeni:

$$\Psi_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt = \Phi(t) \int \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} 1 \\ -t + e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t + c_1 \\ -t^2/2 - e^{-t} + c_2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fem } c_1 = c_2 = 0}}{=} \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{t^2}{2} e^t - 1 \end{pmatrix}$$

- Solució general edo no homogènia:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Psi_p(t) + c_1 \Psi_1(t) + c_2 \Psi_2(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ \frac{t^2}{2} e^t - 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

• Resolución del PVI $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 e^{t_0} \\ \frac{t_0^2}{2} e^{t_0} - 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^{t_0} \\ t_0 e^{t_0} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t_0} \end{pmatrix}$$

d'on:

$$\left.\begin{aligned} e^{t_0} \cdot c_1 &= x_0 - t_0 e^{t_0} \\ t_0 e^{t_0} \cdot c_1 + e^{t_0} c_2 &= y_0 - \frac{t_0^2}{2} e^{t_0} + 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= e^{-t_0} x_0 - t_0 \\ c_2 &= e^{-t_0}(y_0 + 1 - t_0 \cdot x_0) + \\ &\quad + t_0^2/2 \end{aligned}$$