

Exemple:

Trobar la solució general dels sistema següent.

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2z \\ y' = 3x + 6z \\ z' = -4x - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 3 & -\lambda & 6 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda+3)(\lambda-(1+2i))(1-(1-2i))$$

Vap's A: $\{-3, 1+2i, 1-2i\}$

Vap's A tots diferents $\Rightarrow$ A diagonalitza

* $\vec{v}$ vap de A de vap $\lambda \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ (vector solució de $\vec{x}' = A\vec{x}$)

Problema: Què fem de λ i $\vec{v}$ són complexos?

* $\lambda = a+ib$ vap complex de A (real); $\vec{v}$ vap complex de vap λ . Aleshores:

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \operatorname{Re}(e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{at} (\cos t \operatorname{Re} \vec{v} - \sin t \operatorname{Im} \vec{v}) \\ \vec{x}_2(t) &= \operatorname{Im}(e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{at} (\sin t \operatorname{Re} \vec{v} + \cos t \operatorname{Im} \vec{v}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dues solucions reals} \\ \text{de l'edo.} \end{array}$$

vap	vap	
-3	(0, 2, -1)	
1+2i	(-5, -3-6i, 4-2i)	← no cal buscar el vap de vap 1-2i [que és el complex conjugat]

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3-6i \\ 4-2i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Part real}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{Part imaginària}}$$

Conjunt fonamental de solucions:

$$\left\{ e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{+t} \left(\cos 2t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right), e^{+t} \left(\sin 2t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

matrici fonamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -5e^{+t} \cos 2t & -5e^{+t} \sin 2t \\ 2e^{-3t} & e^{+t}(-3 \cos 2t + 6 \sin 2t) & e^{+t}(-3 \sin 2t - 6 \cos 2t) \\ -e^{-3t} & e^{+t}(4 \cos 2t + 2 \sin 2t) & e^{+t}(4 \sin 2t - 2 \cos 2t) \end{pmatrix}$$