Resolució edo's lineals ordre 2 a coeficients constants

- **Equació:** $\boxed{a y'' + b y' + c y = 0}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$
- **Equació característica:** $\boxed{a \cdot m^2 + b m + c = 0}$ (Polinomi grau 2)

Arrels Eq. Caract.	Solucions fonamentals
Reals $m_1 \neq m_2$	$y_1(x) = e^{m_1 x}$, $y_2(x) = e^{m_2 x}$
Reals $m_1 = m_2 = m$	$y_1(x) = e^{m x}$, $y_2(x) = x e^{m x}$
Complexes conjugades $m_1 = \alpha + i\beta$ $m_2 = \alpha - i\beta$	$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$

- **Exemple 1** : Oscil·lador harmònic de freqüència $w > 0$

$$\boxed{y'' + w^2 y = 0}$$

- Eq. característica: $\boxed{m^2 + w^2 = 0}$
- Arrels Eq. caract.: $\boxed{m_+ = i w, \quad m_- = -i w}$

  (Complexes conjugades de part real zero)

- Solucions fonamentals: $y_1(x) = \cos w x$, $y_2(x) = \sin w x$

  $(\alpha = 0, \beta = w)$

- Solució general: $\boxed{y(x) = C_1 \cos w x + C_2 \sin w x}$

- **Exemple 2:** Oscil·lador harmònic esmorteït

$$\boxed{y'' + 2\varepsilon y' + w^2 y = 0}$$

* $w > 0$ freqüència oscil·lador no esmorteït
* $\varepsilon > 0$ Coeficient d'esmorteiment (força de fricció proporcional a la velocitat)

- **Eq. caract.:** $m^2 + 2\varepsilon m + w^2 = 0$

- **Arrels Eq. ca~~r~~ract.:**

$$\boxed{m_{\pm}} = \frac{-2\varepsilon \pm \sqrt{(2\varepsilon)^2 - 4w^2}}{2} = \boxed{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - w^2}}$$

(i) Cas Sub - esmorteit : $\boxed{\varepsilon < \omega}$

Dues arrels complexes conjugades : $m_{\pm} = -\varepsilon \pm i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$

$(\alpha = -\varepsilon, \ \beta = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2})$

Solució: $\boxed{y(t) = c_1 e^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\, t) + c_2 e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}\, t)}$

(ii) Cas criticament - esmorteit : $\boxed{\varepsilon = \omega}$

Una arrel real doble $m = -\varepsilon$

Solució : $\boxed{y(t) = c_1 e^{-\varepsilon t} + c_2 e^{-\varepsilon t} \cdot t}$

(iii) Cas Sobre - esmorteit : $\boxed{\varepsilon > \omega}$

Dues arrels reals diferents : $m_{\pm} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2} < 0$

Solució: $\boxed{y(t) = c_1 e^{(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2})t}}$

Cas no homogeni: mètode de variació de les constants

- Equació: $\boxed{a y'' + b y' + c y = g(x)}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$
- Equació normalitzada: $\boxed{y'' + p y' + q y = f(x)}$ $\left(f(x) = \frac{g(x)}{a}\right)$
- Sigui $\boxed{\{y_1(x), y_2(x)\}}$ un conjunt fonamental de solucions edo homogènia $\boxed{a y'' + b y' + c y = 0}$
- Calculem el seu Wronskià, definit pel determinant:

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$$

Tenim $W(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Calculem $u_1(x)$ i $u_2(t)$ mitjançant les integrals següents

$$\boxed{u_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}\,dx}, \qquad \boxed{u_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}\,dx}$$

($u_1(x)$ i $u_2(x)$ són primitives qualsevol i sense const integració)

- Llavors: $\boxed{y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)}$

dóna una <u>solució particular de l'edo no homogènia</u>

- La <u>solució general de l'edo no homogènia</u> és:

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

- **Exemple 3**: Resolem el PVI $\boxed{y(0) = 1,\ y'(0) = 0}$

per l'edo $\boxed{y'' + y = \frac{1}{\cos x}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- Conjunt fonamental edo homogènia $y'' + y = 0$: $\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = \cos x \\ y_2(x) = \sin x \end{array}}$
- Wronskià $\{y_1(x), y_2(x)\}$: $W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$
- Solució particular edo no homogènia:

$$u_1(x) = -\int \frac{\sin x \cdot (1/\cos x)}{1}\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln(\cos x) + \cancel{c_1}^{\,0}$$

$$u_2(x) = \int \frac{\cos x \cdot (1/\cos x)}{1}\,dx = \int 1\,dx = x + \cancel{c_2}^{\,0}$$

obtenim: $y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$

$$= \ln(\cos x) \cdot \cos x + x \cdot \sin x$$

- La solució general de l'edo no homogènia és:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \\ &= \ln(\cos x)\cdot\cos x + x\cdot\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x \end{aligned}}$$

- Resolem el PVI

$$\boxed{1 = y(0)} = \ln(\cos(0))\cdot\cos(0) + 0\cdot\sin(0) + C_1\cos(0) + C_2\sin(0) \boxed{= C_1}$$

$$y'(x) = -\ln(\cos x)\sin x + x\cos x - C_1\sin x + C_2\cos x$$

$$\boxed{0 = y'(0)} = -\ln(\cos(0))\sin(0) + 0\cdot\cos(0) - C_1\sin(0) + C_2\cos(0) \boxed{= C_2}$$

- La solució del PVI és

$$\boxed{y(x) = \ln(\cos(x))\cdot\cos x + x\sin x + \cos x}$$

- <u>Exemple 4</u>: Troben la solució general de $\boxed{y'' - 2y' + y = e^x}$

- Equació característica edo homogènia: $\boxed{m^2 - 2m + 1 = 0}$

- Arrels eq. caract. / solucions fonamentals edo homogènia:

$\boxed{\{1, 1\} \text{ (doble)}}$ $\quad \boxed{y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x e^x}$

- Wronskià $\{y_1(x), y_2(x)\}$: $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$

- Solució particular edo no homogènia: $\boxed{(f(x) = e^x)}$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}\,dx = -\int \frac{x e^x \cdot e^x}{e^{2x}}\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + \cancel{c_1}^{\,0}$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}\,dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{e^{2x}}\,dx = \int 1\,dx = x + \cancel{c_2}^{\,0}$$

- obtenim: $\boxed{y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) = -\frac{x^2}{2} e^x + x \cdot x e^x = \frac{x^2}{2} e^x}$

- Solució general: $\boxed{y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \frac{x^2}{2} e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x}$

- Exemple 5 : Oscil·lador harmònic forçat periòdicament

$$\boxed{\underbrace{x'' + x}_{\substack{\text{oscil·lador}\\ \text{harmònic de}\\ \text{freqüència} = 1}} = \underbrace{\sin(\omega t)}_{\substack{\text{forçament}\\ \text{periòdic de}\\ \text{freqüència } \omega}} , \quad \omega > 0}$$

(el període és $T = 2\pi/\omega$)

Solució general:

- Cas no-resonant ($\omega \neq 1$)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{1-\omega^2} \sin(\omega t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t}$$

- Cas resonant ($\omega = 1$)

$$\boxed{x(t) = -\frac{t}{2} \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t}$$

- Resolució:

- $\boxed{\{ x_1(t) = \cos t,\ x_2(t) = \sin t \}}$ cjt. fonamental solucions edo homogènia $x'' + x = 0$. El seu wronskià és:

$$\boxed{W(t) =} \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

- Busquem una solució particular de l'edo homogènia per variació de les constants: $\boxed{(f(t) = \sin \omega t)}$

$$\boxed{x_p(t) = u_1(t)\, x_1(t) + u_2(t)\, x_2(t)}$$ on:

$$u_1(t) = -\int \frac{x_2(t) f(t)}{W(t)}\, dt = -\int \sin t \cdot \sin(\omega t)\, dt$$

$$u_2(t) = \int \frac{x_1(t) f(t)}{W(t)}\, dt = \int \cos t \cdot \cos(\omega t)\, dt$$

- <u>Calculs</u>: Recordem:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Cas } w \neq 1}$

$$u_1(t) = -\int \sin t\cdot\sin(wt)\,dt = -\frac{1}{2}\int\left\{\cos(1-w)t - \cos(1+w)t\right\}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(1-w)t}{1-w} - \frac{\sin(1+w)t}{1+w}\right\} + \cancel{C_1}^{\,0}$$

$$u_2(t) = \int \sin(wt)\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int\left\{\sin(1+w)t + \sin(w-1)t\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(1+w)t}{1+w} - \frac{\cos(w-1)t}{w-1}\right\} + \cancel{C_2}^{\,0}$$

$\boxed{\text{Cas } w \neq 1}$

$$X_p(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(1-w)t}{1-w} - \frac{\sin(1+w)t}{1+w}\right\}\cdot\cos t +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(1+w)t}{1+w} - \frac{\cos(w-1)t}{w-1}\right\}\cdot\sin t =$$

$$= \frac{1}{2(1-w)}\left\{\sin(w-1)t\cdot\cos t + \cos(w-1)t\cdot\sin t\right\} +$$

$$+\frac{1}{2(1+w)}\left\{\sin(1+w)t\cdot\cos t - \cos(1+w)t\cdot\sin t\right\}$$

$$= \frac{1}{2(1-w)}\sin(wt) + \frac{1}{2(1+w)}\sin(wt) =$$

$$= \frac{1}{1-w^2}\sin(wt)$$

$\boxed{\text{Cas } \omega = 1}$

$$u_1(t) = -\int \sin^2 t \, dt = -\int \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + \cancel{C_1}^{\,0}$$

$$u_2(t) = \int \cos t \cdot \sin t \, dt = \frac{\sin^2 t}{2} + \cancel{C_2}^{\,0}$$

$$x_p(t) = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right)\cos t + \frac{\sin^2 t}{2}\sin t =$$
$$= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\left\{\sin t \cdot \cos^2 t + \sin t \cdot \sin^2 t\right\} =$$
$$= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$

(observem que si bé aquesta es la solució particular que obtenim, també ho és $x_p(t) = -\frac{t}{2}\cos t$, ja que $1/2 \sin t$ és combinació de $x_1(t) = \cos t$ i $x_2(t) = \sin t$)