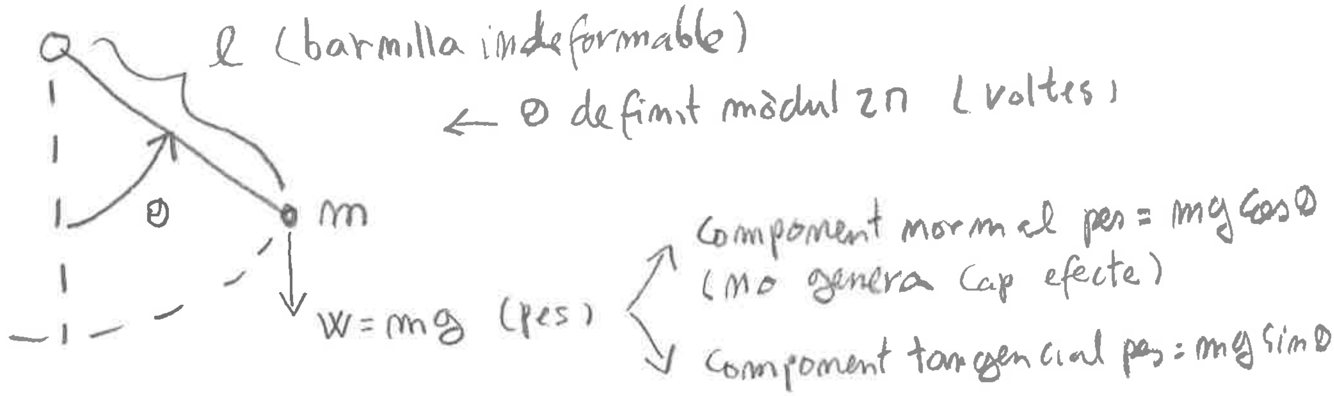
(42) Pèndol amb fricció

D'Un pèndol de longitud L hi penja una massa m sota una gravetat g. Sigui k el coeficient de fricció proporcional a la velocitat ($k>0$).

(a) Justifiqueu que l'equació que modela el pèndol és

$$\theta'' + m^{-1} k \theta' + l^{-1} g \sin\theta = 0$$

on $\theta = \theta(t)$ és l'angle format pel pèndol amb la vertical inferior. Quines dades cal donar per definir un PVI?



Llei de Newton: m * acceleració = $\sum$ forces externes

Només tenim en compte la component tangencial de l'acceleració i de les forces (acceleració tangencial = $\theta'' l$)

$$m\theta'' l = -\underbrace{mg\sin\theta}_{\text{El pes actua en sentit contrari al desplaçament } \theta} - \underbrace{kl\theta'}_{\text{força fricció proporcional velocitat lineal} = l\theta'}$$

Per definir un PVI cal donar $\theta_0 = \theta(0)$ (angle desplaçament inicial) i $w_0 = \theta'(0)$ (velocitat angular inicial)

(b) Escriviu l'equació com un sistema no lineal 2D de 1er. ordre, introduint la velocitat angular $\omega = \theta'$.

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= \omega &&= f(\theta,\omega) \\ \omega' &= -K\omega - \sin\theta &&= g(\theta,\omega) \end{aligned}\right\}$$ (Per simplificar fem $l = g = 1$).

(c) Estudieu, si és possible, l'estabilitat de les 2 posicions d'equilibri del pèndol per linealització.

* Pts. equilibri $\iff \left\{\begin{aligned} f(\theta,\omega) &= \omega = 0 \\ g(\theta,\omega) &= -K\omega - \sin\theta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\theta,\omega) = (m\pi, 0)$
$m \in \mathbb{Z}$

m parell equilibris inferiors; m senar equilibris superiors.

* Sistema linealitzat:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial \omega} \end{pmatrix}\Bigg|_{(m\pi,0)} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & -K \end{pmatrix}\Bigg|_{(m\pi,0)} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{m+1} & -K \end{pmatrix}}_{A_m} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$$

$\det(A_m) = (-1)^m$; $\mathrm{tr}(A_m) = -K < 0$

* m senar $\Rightarrow \det(A_m) = -1 < 0 \Rightarrow$ L'equilibri superior és un punt de sella (inestable) $\Rightarrow$ És un equilibri inestable del sist. no lineal.

* m parell $\Rightarrow \det(A_m) = 1 > 0$ & $\mathrm{tr}(A_m) = -K < 0 \Rightarrow$ l'equilibri inferior és asimptòticament estable en el sist. no lineal

observem que per determinar el tipus qualitatiu, focus o node, ens cal saber el signe del discriminant:

$$\Delta = \mathrm{tr}(A_m)^2 - 4\det(A_m) = K^2 - 4$$

Donat que $K > 0$ és un coeficient de fricció, és natural pensar que és petit i per tant que $\Delta = K^2 - 4 < 0$

Així doncs, l'equilibri inferior és de tipus focus

(d) comproven que l'energia mecànica total

$$V(\theta,\omega)=\underbrace{\frac{m}{2}l^2\omega^2}_{\text{Cinètica}}+\underbrace{mgl(1-\cos\theta)}_{\text{Potencial quan } K=0}$$

no creix al llarg de les trajectòries. Al llarg de quines trajectòries es manté constant?

* Fem $m=l=g=1 \Rightarrow V(\theta,\omega)=\frac{\omega^2}{2}+1-\cos\theta$.

$$W=\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial \theta}\cdot\theta'+\frac{\partial V}{\partial \omega}\cdot\omega'=\sin\theta\cdot\omega+\omega(-K\omega-\sin\theta)=-K\omega^2\leq 0$$

Per tant, V és o bé decreixent o bé constant sobre les trajectòries. Si imposem $W=\dot{V}=0 \Leftrightarrow \omega=0$.

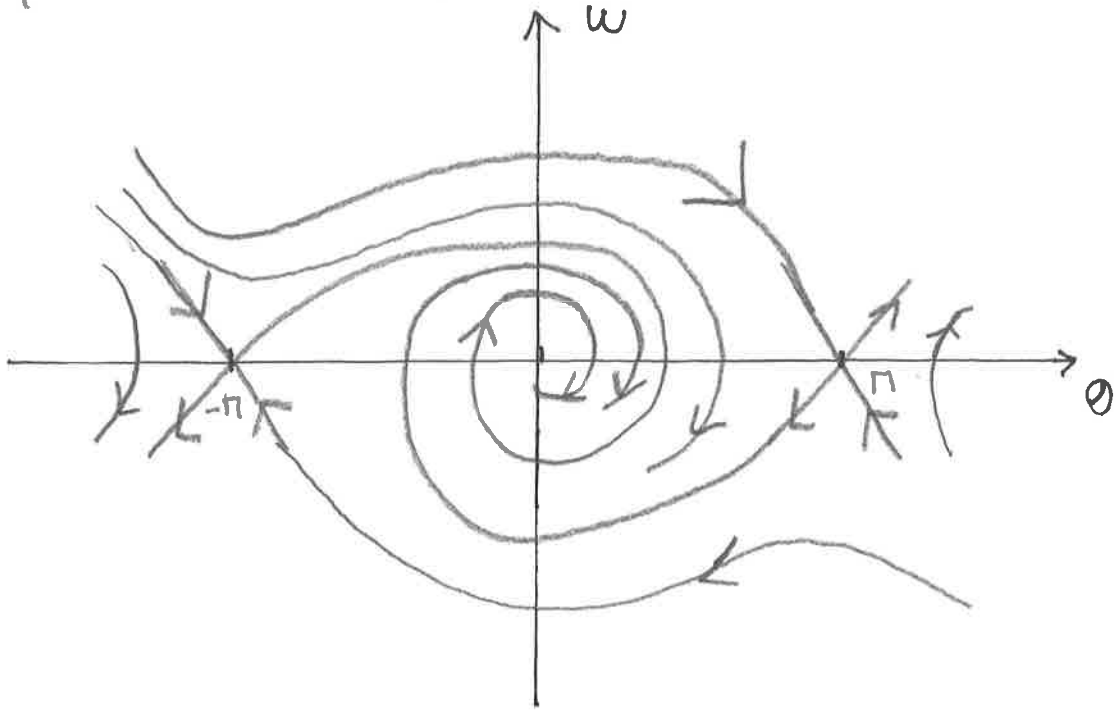
Les úniques trajectòries que compleixen $\omega=0$ són els equilibris del pèndol. Per a totes les altres, V és decreixent.

(e) Proven que el pèndol sense fricció no té cap trajectòria periòdica no constant

Calculem la divergència del camp $\vec{F}=(f,g)=(\omega,-K\omega-\sin\theta)$

$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{\partial g}{\partial \omega}=-K<0 \Rightarrow$ El volum es contrau al llarg de totes les solucions del sistema i per tant no pot haver-hi cap solució periòdica no constant.

Un croquis aproximat del retrat de fases del pèndol amb fricció és el següent



Punts clau:

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -\sin\theta - K\omega \end{aligned}\right\}$$

- Com que $\theta' = \omega$, llavors $\theta' > 0$ si $\omega > 0$ (això és, les solucions es mouen cap a la dreta si $\omega > 0$, semi-pla superior) i $\theta' < 0$ si $\omega < 0$, (les solucions es mouen cap a l'esquerra si $\omega < 0$, semi-pla inferior).
- Al $(0,0)$ tenim un focus estable. Les solucions "entren" a $(0,0)$ espiralant en sentit anti-horari.
- A $(\pi, 0)$ tenim un punt de sella. Llavors, com θ és un angle (variable 2π-periòdica) tot es va repetint cada cop que afegim $\pm 2\pi$ a θ (en $(-\pi,0)$ etc).