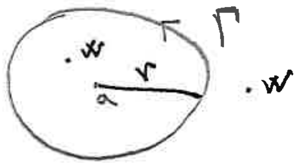
Teoria de Cauchy global

Fins ara hem abordat les funcions holomorfes $f \in H(\Omega)$ des del punt de vista local, sense tenir en compta la topologia del domini Ω on estan definides. Basicament, fins ara, podem pensar que Ω era un disc o, de fet, qualsevol domini Ω que es pogués contraure a un disc. Ara toca veure l'efecte que té la topologia de Ω en aquestes propietats, en el ben entés que la forma de Ω està condicionada per aquells punts on f no admet prolongació / extensió holomorfa ("singularitats de f").

- <u>Recordem</u>:



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r)^+} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 1, & \text{si } w\in D(a;r) \ [\text{fórmula Cauchy amb } f\equiv 1] \\ 0, & \text{si } w\notin \overline{D}(a;r) \ [f(z)=\frac{1}{z-w}\in H(\overline{D}(a;r)) \text{ i admet} \\ & \text{Primitiva } F\in H(\overline{D}(a;r))] \end{cases}$$

Per tant, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-w}$ compta el nº de voltes que $\Gamma=\partial D(a;r)^+$ fa entorn del punt w.

- <u>Def.</u>: Γ camí tancat i orientat en $\mathbb{C}$ i $a\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Definim l'índex de Γ respecte al punt a (o número de rotació de Γ respecte a) com:

$$n(\Gamma,a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}$$

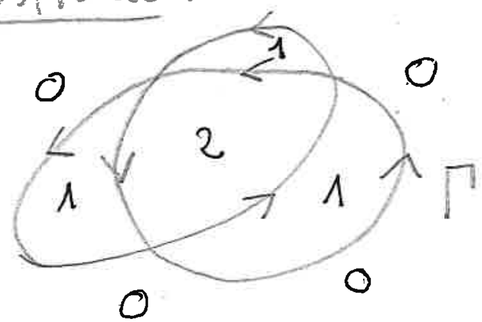
- Anem a veure que la idea intuïtiva de que $n(\Gamma,a)$ compta el nº de voltes que Γ fa entorn de a és vàlida en general.

- <u>Teorema</u>: Sigui Γ un camí tancat i orientat de $\mathbb{C}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} n(\Gamma,\cdot) : \mathbb{C}\setminus\Gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto n(\Gamma,a) \end{aligned}$$

i es constant a cada component connexa de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ i val zero en la component connexa no fitada de Γ.

- Demostració:



Per simplificar, suposem que Γ admet una parametrització $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ que és C^1
$t \longmapsto \gamma(t)$
(i no només C^1 a trossos). Donat $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ definim:

$$g(t) = g_a(t) := \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\, ds, \ \forall t \in [0,1] \ (\text{És clar } \gamma(s)-a \neq 0).$$

Clarament: $g(0) = 0$, $g(1) = 2\pi i \cdot n(\Gamma, a)$, $g'(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$, $\forall t \in (0,1)$, i $g \in C^1([0,1])$. Calculem:

$$\frac{d}{dt}\left\{ e^{-g(t)} \cdot (\gamma(t)-a) \right\} = e^{-g(t)} \cdot \gamma'(t) - g'(t) \cdot e^{-g(t)} \cdot g(t) \cdot (\gamma(t)-a) = 0, \ \forall t \in (0,1).$$

Així, usant que $g \in C([0,1]) \Rightarrow e^{-g(t)} \cdot (\gamma(t)-a) = c \in \mathbb{C}, \forall t \in [0,1]$.

Fent $t=0$ i $t=0 \Rightarrow e^{-g(0)} \cdot (\gamma(0)-a) = c = e^{-g(1)}(\gamma(1)-a) \Rightarrow e^{-g(1)} = 1 \Rightarrow e^{g(1)} = 1$

(Γ tancada $\Leftrightarrow \gamma(0) = \gamma(1)$)

Per tant: $g(1) = 2\pi k i$, per algun $k \in \mathbb{Z}$

Així doncs, $2\pi i\, n(\Gamma, a) = g_a(1) = 2\pi k i \Rightarrow n(\Gamma, a) = k \in \mathbb{Z}$.

És clar que $a \longmapsto n(\Gamma, a)$ és contínua $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ i, de fet, és holomorfa (derivant sota el signe integral: $\dfrac{d}{da}(n(\Gamma, a)) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^2}$).

Per tant, $a \mapsto n(\Gamma, a)$ ha de ser constant (i a valors enters) en cada component connexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Finalment, si suposem $\Gamma \subset D(0;R)$ per un $R>0$ prou gran i $|a|>R$:

$$|n(\Gamma,a)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z\in\Gamma} \left\{ \left| \frac{1}{z-a} \right| \right\} \cdot \operatorname{long}(\Gamma) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|a|-R} \cdot \operatorname{long}(\Gamma) \xrightarrow[|a|\to+\infty]{} 0$$

on hem usat que $|z-a| \geq ||z|-|a|| = |a|-|z| > |a|-R \Rightarrow \frac{1}{|z-a|} \leq \frac{1}{|a|-|z|}$.

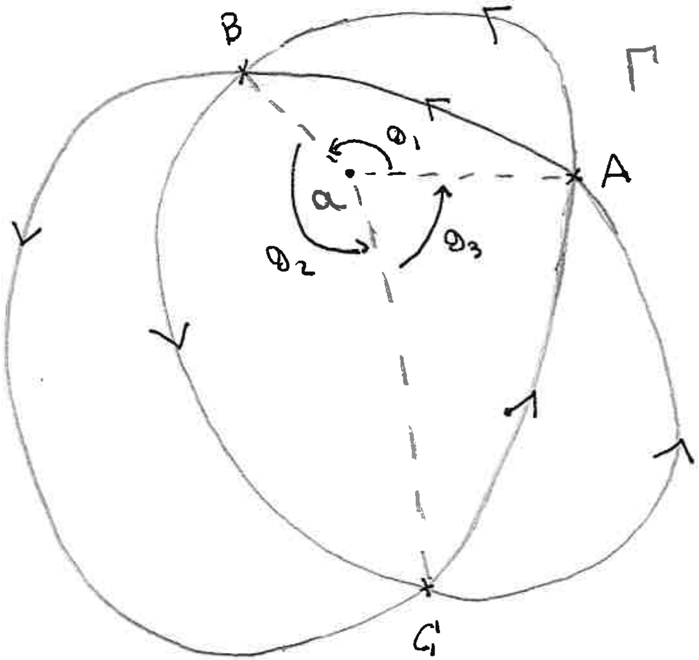
si $|a|>R>|z|$

Per tant, $n(\Gamma,a)=0$ si $|a|>>1$ és prou gran $\Rightarrow n(\Gamma,a)=0$ si a pertany a la component connexa no acotada de Γ.

(Comentari: tot és anàleg si γ és C^1 a trossos.)

- Justificar de forma "més o menys" rigorosa que $n(\Gamma,a)$ compta el nº de voltes que Γ fa entorn de a, passaria per provar un resultat com aquest:

- <u>Lema</u>: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$ parametrització contínua d'un camí tancat i orientat Γ, $a \notin \Gamma$. Aleshores, existeix una funció $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta(t)$ (no única) que ens dóna una determinació contínua de l'argument de $\gamma(t)-a$ al llarg de la corba, $\theta(t) = \arg(\gamma(t)-a)$, $\forall t \in [0,1]$, on $\theta(1)-\theta(0) = 2\pi k$, per algun $k \in \mathbb{Z}$ (que no depèn ni de la $\gamma(t)$ ni $\theta(t)$ triades) que compta el nº de voltes que $\gamma(t)$ dóna entorn a. Finalment, $\log(\gamma(t)-a) = \ln|\gamma(t)-a| + i\,\theta(t)$, determinació contínua de $\log(\gamma(t)-a)$, $\forall t\in[0,1]$.



- Aquí veiem una visualització del lema anterior per una corba Γ com la de la diapositiva 2. Els tres angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sumen 2π i si suposem que $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ parametritza Γ, amb $\gamma(0) = \gamma(1) = A$, llavors es té $\exists\, 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < 1$ t.q.

$$\gamma(t_1) = B,\ \gamma(t_2) = C,\ \gamma(t_3) = A,\ \gamma(t_4) = B,\ \gamma(t_5) = C$$

(p. ex., entenent que A, B, C descomposen de forma natural Γ en 6 arcs, es té $\gamma([0,t_1])$ és l'arc "inferior" dels 2 que uneixen A amb B i $\gamma([t_3,t_4])$ és l'arc superior). Llavors, si entenem $\overrightarrow{aA}$ paral·lel a l'eix x:
$\theta(0) = 0$, $\theta(t_1) = \theta_1$, $\theta(t_2) = \theta_1 + \theta_2$, $\theta(t_3) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$,
$\theta(t_4) = 2\pi + \theta_1$, $\theta(t_5) = 2\pi + \theta_1 + \theta_2$, $\theta(1) = 2\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 4\pi$.

- Usant el lema anterior per calcular $n(\Gamma, a)$ via la seva definició, si suposem que $\gamma(t)$ i $\theta(t)$ són ara C^1, es té:

$$n(\Gamma, a) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \Big[\log(\gamma(t) - a) \Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2\pi i} \Big[\ln|\gamma(t) - a| + i\,\theta(t) \Big]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \Big[\underbrace{(\ln|\gamma(1) - a| - \ln|\gamma(0) - a|)}_{=0} + i \underbrace{(\theta(1) - \theta(0))}_{=2\pi K} \Big] = K \equiv \text{nº voltes que fa } \Gamma \text{ al voltant de } a.$$

- Def.: Anomenarem una *cadena* a tota suma formal de la forma:

$\Gamma = m_1\Gamma_1 + m_2\Gamma_2 + \cdots + m_n\Gamma_n$, on $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ són corbes orientades C^1 a trossos i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ enters arbitraris. Les cadenes es poden sumar, restar i multiplicar per enters per generar-ne de noves. En el cas en que $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ siguin corbes tancades, Γ es diu un *cicle*.

Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ és una cadena i $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ una funció, definim:

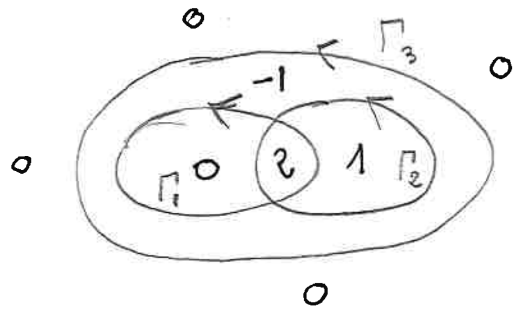
$$\int_\Gamma f(z)\,dz := m_1 \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + m_n \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz$$

En el cas particular en que Γ és un cicle, definim l'índex de Γ respecte a un punt $a \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ com:

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Pel teorema anterior, $n(\Gamma, a) \in \mathbb{Z}$; és constant en cada component connexa de $\mathbb{C}$ determinada per Γ i és zero en la component connexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Així doncs, $n(\Gamma, a)$ compta la suma (ponderada per $m_1, \ldots, m_n$) que cada corba tancada del cicle fa al voltant de a.

- *Exemple*: índexs de $\Gamma = \Gamma_1 + 2\Gamma_2 - \Gamma_3$



- El nostre primer objectiu és extendre el Teorema integral de Cauchy (d'anul·lació d'integrals de funcions holomorfes sobre camins tancats) i la fórmula integral de Cauchy per representar funcions holomorfes, a cicles de $\mathbb{C}$.

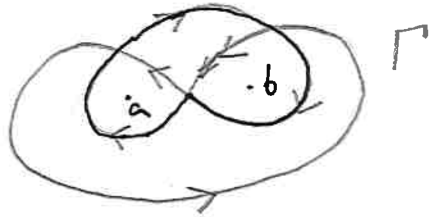
- *Def.*: Donat un cicle $\Gamma \subset \Omega$, on $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert, direm que Γ és homòleg a 0 en Ω sii: $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ($a \notin \Omega$) es té que $n(\Gamma, a) = 0$. En aquest cas, escriurem $\Gamma \sim 0$ en Ω (això és, el cicle <u>no</u> envolta cap punt a que no sigui de Ω). A més, direm que dos cicles Γ_1, Γ_2 són homòlegs en Ω, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ en Ω, sii $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0$ en Ω.

- *Exemples*: $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$

a) $\Gamma \sim 0$ en Ω? No

$n(\Gamma, a) = 2$, $n(\Gamma, b) = 0$

b) $\Gamma \sim 0$ en Ω? Sí.



$n(\Gamma, a) = n(\Gamma, b) = 0$.

- <u>Observació</u>: si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un domini simplement connex i $\Gamma \subset \Omega$ és un cicle, aleshores $\Gamma \sim 0$ en Ω (ja que Ω simplement connex vol dir que Ω no té cap "forat" en el seu interior que la corba pugui envoltar o, millor, que si $z \notin \Omega$ llavors viu en la component connexa no acotada determinada per Γ).

- <u>Def.</u>: Direm que dos camins tancats Γ_0 i Γ_1 són <u>homòtops</u> en $\Omega \subset \mathbb{C}$ si es poden deformar l'un en l'altre de forma contínua en Ω. Concretament, si

$$\begin{aligned} \gamma_0, \gamma_1 : [0,1] &\to \Omega \\ t &\mapsto \gamma_0(t), \gamma_1(t) \end{aligned}$$

són parametritzacions contínues de Γ_0 i Γ_1, respectivament, aleshores direm que $\Gamma_0 \approx \Gamma_1$ (homòtops) en Ω sii:

$$\begin{aligned} \exists F : [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow \Omega \\ (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{paràmetre} \\ \text{deformació}}}{s}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{paràmetre} \\ \text{corbes}}}{t}) &\longmapsto F(s,t) \end{aligned}, \quad F \in C^0, \text{ tal que: } \begin{aligned} &(1)\ F(0,t) = \gamma_0(t) \\ &(2)\ F(1,t) = \gamma_1(t) \\ &(3)\ F(s,1) = F(s,0) \end{aligned}$$

Això és: per $s=0$ l'aplicació $t \mapsto F(0,t)$ dóna Γ_0; per $s=1$, l'aplicació $t \mapsto F(1,t)$ dóna Γ_1; per cada $s \in [0,1]$, l'aplicació $t \mapsto F(s,t)$ dóna una corba tancada de forma que quan s va de "0" a "1" deforma, de forma contínua, Γ_0 en Γ_1, però sense sortir de Ω.

- Per raons tècniques, si $\Gamma_0 \approx \Gamma_1$, demanarem que la funció $F(s,t)$ que dóna la homotopia complexa que, $\forall s \in [0,1]$, la corba $t \mapsto F(s,t)$ sigui derivable respecte de t i que $F_t : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ sigui contínua. "És clar" que això ho podem aconseguir si γ_0, γ_1 són parametritzacions C^1.

- <u>Proposició</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i Γ_0, Γ_1 camins tancats en Ω. Aleshores:

$$\Gamma_0 \approx \Gamma_1 \text{ en } \Omega \Rightarrow \Gamma_0 \sim \Gamma_1 \text{ en } \Omega.$$

(homòtops) (homòlegs)

- <u>Demostració</u>: Hem de veure que si $\Gamma_0 \approx \Gamma_1$ en $\Omega \Rightarrow \Gamma_0 - \Gamma_1 \sim 0$ en Ω. Això és, cal veure que $n(\Gamma_0, w) = n(\Gamma_1, w)$, $\forall w \notin \Omega$. Considerem una funció

$$F : [0,1] \times [0,1] \to \Omega, \quad (s, t) \mapsto F(s,t)$$

que ens doni la homotopia entre Γ_0 i Γ_1, de forma que si denotem per $\gamma_s(t) = F(s,t)$, $\forall s \in [0,1]$, llavors $t \mapsto \gamma_s(t)$ parametritza una corba Γ_s corresponent a la família de corbes tancades que deforma Γ_0 (per $s=0$) en Γ_1 (per $s=1$). Com que totes aquestes corbes són dins de Ω, si fixem $w \notin \Omega$ té sentit calcular $n(\Gamma_s, w)$ com a funció de s.

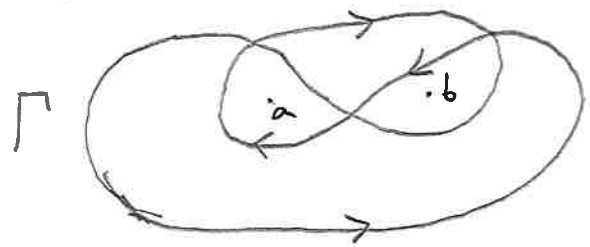
concretament: $s \mapsto n(\Gamma_s, w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{F_t(s,t)}{F(s,t)-w}\, dt$. D'aquí,

usant que F i F_t són funcions contínues, obtenim que $s \mapsto n(\Gamma_s, w)$ és una funció contínua i a més a valors enters. Per tant, $s \in [0,1] \mapsto n(\Gamma_s, w)$ és una funció constant i, en particular, $n(\Gamma_0, w) = n(\Gamma, w)$ com volíem.

- observacions:

(1) Un criteri pràctic per veure que $\Gamma \sim 0$ en Ω, és tractar de deformar Γ en un punt de forma contínua dins de Ω (és diu llavors que Γ és una corba contràctil en Ω).

(2) Atenció! Hi ha camins tancats $\Gamma \sim 0$ en Ω que no són contràctils dins Ω. Un exemple l'hem vist ja en la diapositiva 7 (Veure també els apunts del Quim Ortega):



$\Gamma \sim 0$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$? Sí.

$\Gamma \simeq \{\text{punt}\}$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$? No

- Ara ja som en condicions de "globalitzar" a dominis generals el teorema de Cauchy d'anul·lació d'integrals de funcions holomorfes sobre camins tancats i la fórmula de Cauchy.

Teorema de Cauchy global i fórmula de Cauchy global

Teorema

$\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$ i $\Gamma \subset \Omega$ cicle tal que $\Gamma \sim 0$ en Ω. Llavors:

(i) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ *(teorema integral de Cauchy global).*

(ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = n(\Gamma, a)\cdot f(a), \quad \forall a \in \Omega \setminus \Gamma$ *(fórmula integral de Cauchy global).*

(iii) $\displaystyle\frac{k!}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz = n(\Gamma, a)\cdot f^{(k)}(a), \quad \forall a \in \Omega \setminus \Gamma,\ k \geq 0.$

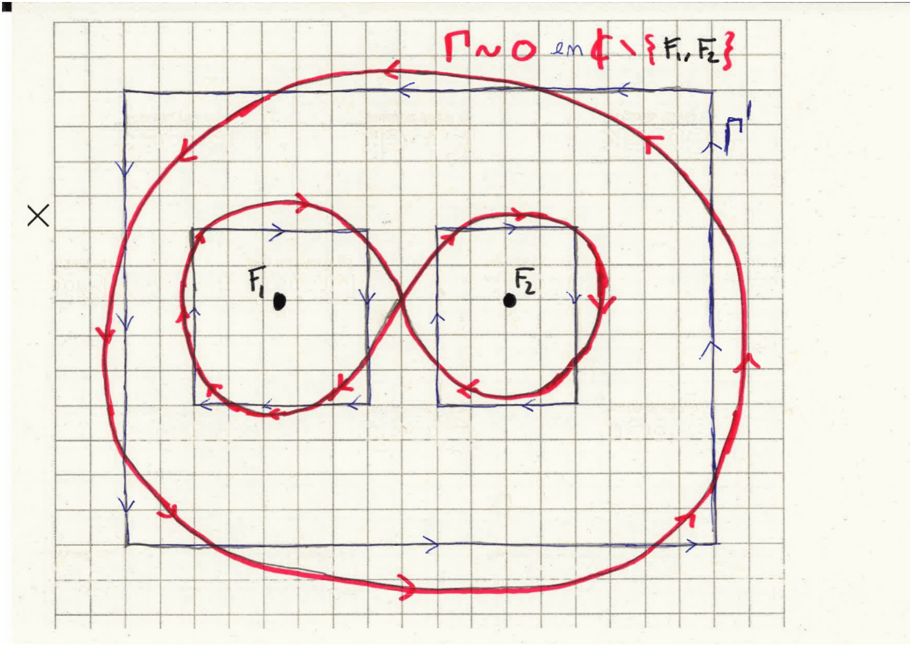
Tot seguit farem una prova **esquemàtica** de l'apartat (i). A partir d'ell deduïrem els altres dos apartats. Per veure (i) recordem:

- $f \in H(D)$, on $D \subset \mathbb{C}$ disc obert $\implies$ f admet primitiva en D $\implies$ $C_1, C_2 \subset D$ arcs de corba amb mateixos extrems i orientació, llavors $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ $\implies$ podem "deformar" corbes dins D (fixant els extrems) tot mantenint el valor de la integral.

- D'inici $\Gamma \subset \Omega$ és un cicle i no pas una única corba. Així, no és cap problema si per fer la prova substituïm alguna corba del cicle per 2 o més corbes tancades en Ω mantenint el valor de la integral.

Tot seguit fem (esquemàticament) la prova de l'apartat (i) pas a pas.

1. **Recobriment de Γ per discs del mateix radi:** Com que $\Gamma \subset \Omega$ és compacte $\implies \exists \delta_0 > 0$ tal que $D(z, \delta_0) \subset \Omega$, $\forall z \in \Gamma$.
2. **Quadriculació de $\mathbb{C}$:** Recobrim tot $\mathbb{C}$ per quadrats de costats de longitud δ i paral·lels als eixos coordenats, **on** $\delta \ll 1$ **és prou petit** de forma que es compleixi el que segueix (no fem tots els detalls).
3. **Cicle poligonal Γ':** Deformem Γ de forma homòtopa dins Ω en un cicle $\Gamma' \approx \Gamma$ de forma que Γ' sigui unió d'arcs de corba definits per costats de longitud δ de la quadriculació.
4. **Arcs corresponents entre Γ i Γ':** El cicle Γ i la poligonal Γ' han de poder descomposar-se en un nombre finit d'arcs de corba (el mateix número en cada cas) complint que cadascun d'aquests arcs de corba de Γ es **correspon** amb un dels de Γ', de forma que ambdós arcs tenen els mateixos punts extrems (que viuen doncs en $\Gamma \cap \Gamma'$, però no tenen perquè ser vèrtexs de cap dels quadrats!).



Γ ∼ 0 em ℂ \ {F₁, F₂}
Γ
Γ'
F₁
F₂

5. **Deformació d'arcs dins dels discs:** Cadascuna d'aquestes parelles d'arcs de corba de Γ i Γ' **corresponents** ha d'estar continguda dins d'un dels discs $D(z, \delta_0) \subset \Omega$ del recobriment de Γ, de forma que és possible deformar l'arc de Γ en el corresponent de Γ' dins d'aquest disc del recobriment (i.e., el disc conté tot el continu de corbes de la deformació), mantenint fixos els extrems dels arcs al llarg de tota la deformació.
6. Cada quadrat de la quadriculació que contingui algun arc de Γ' ha d'estar integrament contingut en algun d'aquests discs.
7. $\Gamma' \approx \Gamma$ dins $\Omega \implies n(\Gamma', z) = n(\Gamma, z) = 0, \forall z \notin \Omega \implies \Gamma' \sim 0$ en Ω.
8. El fet de que generem Γ' deformant arcs de Γ dins de discs on f és holomorfa i mantenint els extrems fixats $\implies \int_\Gamma f = \int_{\Gamma'} f$.
9. (i) $\iff \int_{\Gamma'} f = 0$ si $\Gamma' \sim 0$ en Ω cicle poligonal en la quadriculació.
10. $A \subset \mathbb{R}$ conjunt (compacte) unió de totes les components connexes de $\mathbb{C}$ tancades per corbes del cicle Γ' (A no té perquè ser connex).
11. $\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ rectangle de $\mathbb{C}$ format unint n quadrats (diferents 2 a 2) de la quadiculació de $\mathbb{C}$, prou gran per tal que $A \subset \mathcal{R}$. Ordenem els quadrats $\{R_j\}_{j=1}^{n}$, p. ex., d'esquerra a dreta i de dalt a baix.

12. **Cicle Π equivalent a Γ' com a suma de costats de quadrats:** Sigui Π el cicle $\Pi = \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma', z_j) \cdot \partial R_j^+$, on $z_j \in \mathring{R}_j$ punt qualsevol interior del rectangle R_j, $\forall j = 1, \ldots, n$.
    - $n(\Gamma', z_j)$ no depèn del $z_j \in \mathring{R}_j$ triat. (L'índex de Γ' només pot canviar si travessem un dels seus costats i, per tant, mai en l'interior d'un dels quadrats de la quadriculació de $\mathbb{C}$.)
    - Si $\mathring{R}_j$ conté algun $z_j \notin \Omega$, llavors $n(\Gamma', z_j) = 0$ en quant $\Gamma' \sim 0$ en Ω. Per tant, si $n(\Gamma', z_j) \neq 0$ per algun $z_j \in \mathring{R}_j \implies R_j \subset \Omega$.
13. **Fi de la prova de (i) en el cas d'equivalència de les integrals:** La integral de f sobre Π val: $\int_\Pi f = \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma', z_j) \cdot \int_{\partial R_j^+} f = 0$, ja que si $n(\Gamma', z_j) \neq 0 \implies R_j \subset \Omega \implies f \in H(R_j) \implies \int_{\partial R_j^+} f = 0$.
    Per tant, si veiem que $\int_{\Gamma'} f = \int_\Pi f$, llavors $\int_\Gamma f = \int_{\Gamma'} f = \int_\Pi f = 0$.
14. **Re-definim $f = 0$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$:** En el càlcul de $\int_\Pi f$ apareix $\int_{\partial R_j^+} f$, $j = 1, \ldots, n$, quan potser f no està ben definida en tots els costats de R_j: només està garantit en aquells que formen part del cicle poligonal Γ'. Evitem problemes "formals" fent $f = 0$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, si ve en el cas en que R_j no està completament inclòs en Ω llavors $n(\Gamma', z_j)$ i per tant "realment" no importa quant val $\int_{\partial R_j^+} f = 0$.

15 Prova esquemàtica de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ (PART I):

- $A \subset \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j \implies$ tots els arcs de corba de Γ' els podem obtenir a partir de costats dels quadrats $\{R_j\}_{j=1}^{n}$.
  (Ull: ∂R_j té 4 costats i si un d'ells és recorregut per Γ' no vol dir pas que els altres hagin de formar part de Γ'!)
- Farem la prova de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ per **inducció finita** respecte del rectangles $\{R_j\}_{j=1}^{n}$.
- Considerarem una llista de cicles $\{\Gamma'_k\}_{k=0}^{n}$, amb $\Gamma'_0 = \Gamma'$ i $\Gamma'_n = \emptyset$, que definiren suprimint de forma successiva de Γ' la "possible" contribució de ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc.
- Cadascuna d'aquestes contribucions suprimides de Γ' s'anirà acumulant successivament en una nova llista de cicles $\{\Pi_k\}_{k=0}^{n}$, amb $\Pi_0 = \emptyset$ i $\Pi_n = \Pi$.
- L'objectiu és mantenir iterativament la igualtat $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_k} f + \int_{\Pi_k} f$, $k = 0, \ldots, n$.
- Aquesta equivalència iterativa d'integrals serà certa per a qualsevol f i no usarà que f sigui holomorfa.
- Fent $k = n$ en la igualtat $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_k} f + \int_{\Pi_k} f$, i usant $\Gamma'_n = \emptyset$, $\Pi_n = \Pi$, obtenim el resultat perseguit: $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$.

15 **Prova esquemàtica de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ (PART II):**

Definim, per a $k = 0, \ldots, n$:

- $\mathcal{R}_k = \bigcup_{j=k+1}^{n} R_j$ successió de dominis definits a partir del rectangle inicial $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ tot suprimint successivament els quadrats R_1, R_2, etc. (d'equerra a dreta i de dalt a baix). Finalment, $\mathcal{R}_n = \emptyset$.
- $\Pi_k = \sum_{j=1}^{k} n(\Gamma', z_j) \cdot \partial R_j^+$ successió de cicles acumulant de forma succesiva la contribució dels costats dels quadrats ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc. a Γ'. Inicialment, $\Pi_0 = \emptyset$ i finalment $\Pi_n = \Pi = \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma', z_j) \cdot \partial R_j^+$.
- $\Gamma'_k = \Gamma' - \Pi_k$ successió de cicles que inicialment és $\Gamma'_0 = \Gamma'$. El que veurem és que Γ'_k s'obté suprimint de Γ' la contribució dels costats dels quadrats ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc. de forma successiva.

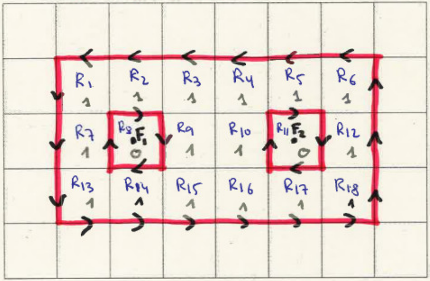
El que es prova per inducció (finita) respecte de $k = 0, \ldots, n$ és:

- $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_k} f + \int_{\Pi_k} f$.
- Γ'_k és un cicle contingut en $\mathcal{R}_k$. Això és, a mesura que eliminem de Γ' la contribució de més costats ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc. el domini que conté el cicle Γ'_k es va encongint. Finalment doncs, $\mathcal{R}_n = \emptyset \implies \Gamma'_n = \emptyset$.
- Si $z_j \in \mathring{R}_j$, per $j = k+1, \ldots, n$, llavors $n(\Gamma'_k, z_j) = n(\Gamma', z_j)$. Això és, si z_j és un punt interior d'algun dels quadrats R_{k+1}, R_{k+2}, etc. que encara formen part de $\mathcal{R}_k$, llavors el nombre de voltes que el "cicle reduït" Γ'_k dóna a aquest punt és el mateix que donava el cicle Γ'.

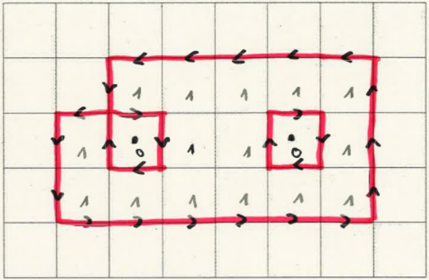
15 **Prova esquemàtica de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ (PART III):** El cas $k = 0$ de la inducció és obvi (és la "configuració inicial"). Tot seguit fem **només** el pas $k = 1$, restant de Γ' la contribució de R_1.

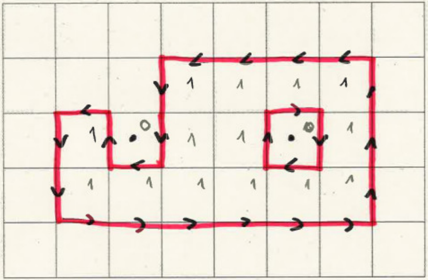
- R_1 és el quadrat del vèrtex superior esquerre del rectangle $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ i $\mathcal{R}_1$ és el rectangle $\mathcal{R}_0$ "esqueixat" treint-li R_1.
- Expressem $\partial R_1^+ = C^s + C^i + C^d + C^e$, suma dels seus 4 costats superior, inferior, dret i esquerre (orientats com toca).
- $n^s, n^e \in \mathbb{Z}$ nombre de cops que $\Gamma'_o = \Gamma'$ recorre C^s i C^e, resp.
- En èsser C^s i C^e **costats exteriors** a $\mathcal{R}_0$ i Γ'_0 cicle **tancat**, és clar que $n^s = n^e = n(\Gamma', z_1)$, on $z_1 \in \mathring{R}_1$.
- Considerem ara el cicle obtingut **restant** de Γ'_0 la corba tancada $n(\Gamma', z_1) \cdot \partial R_1^+$. Concretament, obtenim el cicle $\Gamma'_1 = \Gamma'_0 - \Pi_1$.
- $\Gamma'_1 \subset \mathcal{R}_1$ ja que hem suprimit de Γ'_0 la contribució dels costats C^s i C^e de R_1, mentres els costats C^i i C^d encara formen part de $\mathcal{R}_1$.
- Γ'_1 pot obtenir-se deformant homòtopament Γ'_0 sobre Γ'_1 ("aixafant" C^s en C^d i C^e en C^i). Per tant, es té $n(\Gamma'_1, z_j) = n(\Gamma'_0, z_j)$, si $z_j \in \mathring{R}_j$, per $j = 2, \ldots, n$, ja que l'índex no es veu modificat per l'homotopia en tots aquells punts que no són travessats per cap de les corbes intermèdies del procés de deformació de Γ'_0 en Γ'_1.
- La igualtat $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_1} f + \int_{\Pi_1} f$ és òbvia en quant $\Gamma'_1 = \Gamma'_0 - \Pi_1$.

$\Gamma_0' = \Gamma_0 \subset \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}$

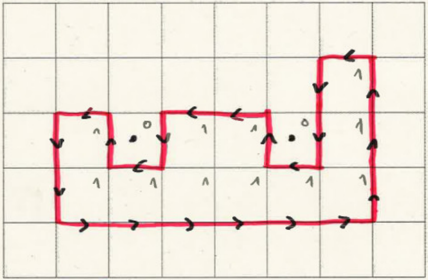


$\Gamma_1' \subset \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \setminus R_1$





$\Gamma_2' \subset \mathcal{R}_2$



$\Gamma_5' \subset \mathcal{R}_5$

Tot Seguit fem la prova de l'apartat (ii). Aquesta prova és "idèntica" a la de la fòrmula de Cauchy local.

1. Definim: $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{si } z \neq a \\ \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$
2. És clar, per definició, que $g \in C^0(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{a\})$.
3. El fet de que una funció sigui o no $\mathbb{C}$-diferenciable en un punt és una propietat **local** $\Longrightarrow$ la teoria de Cauchy local és suficient per concloure que g també és holomorfa en $z = a \Longrightarrow g \in H(\Omega)$.
4. $g \in H(\Omega)$ & $\Gamma \sim 0$ en $\Omega \overset{\text{apartat (i)}}{\Longrightarrow} 0 = \int_\Gamma g(z)\, dz = \int_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = 0$. Per tant:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz = f(a) \cdot \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{dz}{z - a} \right) \overset{\text{def. índex}}{=} f(a) \cdot n(\Gamma, a).$$

Finalment, l'apartat (iii) surt directament derivant (ii) sota el signe integral n cops (indènticament al fet en la teoria de Cauchy local).

- Def.: Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini i $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots\})$, on $a_1, a_2, \dots$ és una successió finita o infinita de punts de Ω on, potser, f no admet prolongació holomorfa. Si aquests punts $a_1, a_2, \dots$ són (i) punts aïllats de Ω (ii) No tenen cap punt d'acumulació en Ω, aleshores direm que són singularitats aïllades de f en Ω i les classificarem d'acord amb el criteri següent:

(1) Direm que a és una singularitat evitable si $\exists \lim_{z \to a} f(z) = L \in \mathbb{C}$.

(2) Direm que a és un pol si $\lim_{z \to a} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.

(3) Direm que a és una singularitat essencial si $\nexists \lim_{z \to a} f(z)$.

- Proposició: Sigui $a \in \mathbb{C}$ una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f (això és, $\exists r > 0$ tal que $f \in H(D(a;r) \setminus \{a\})$. Aleshores:

(1) Si f té una singularitat evitable en a, aleshores f admet prolongació holomorfa en $z = a$ fent $f(a) = L = \lim_{z \to a} f(z)$.

(2) Si f té un pol en a, aleshores $f(z) = (z-a)^{-m} h(z)$, on $h(z)$ és holomorfa en un entorn de $z = a$ i $h(a) \neq 0$ ($m \in \mathbb{N}$ és l'ordre del pol).

(3) Tª de Casorati-Weierstrass: Si f té una singularitat essencial en a, aleshores $\forall \varepsilon > 0$ el conjunt $f(D(a;\varepsilon) \setminus \{a\})$ és dens en $\mathbb{C}$.

- Observacions:

(a) El teorema de Casorati-Weierstrass ens diu que una funció holomorfa en qualsevol entorn, tant petit com vulguem, d'una singularitat essencial pren "gairebé" qualsevol valor.

(b) Un corol·lari immediat (per eliminació) de la proposició anterior és el següent: Si f és una funció holomorfa que té una singularitat aïllada en $z=a$ i $\exists r, M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ (acotada en mòdul), $\forall z \in D(a;r) \setminus \{a\}$, aleshores f té una singularitat evitable en $z=a$.

- Demostració (proposició)

(1) Aquest cas ja l'hem comentat i és una aplicació directa del T^a. d'existència local de primitives: si re-~~de~~finim $f(a) = L$, aleshores $f \in H(D(a;r) \setminus \{a\}) \cap \mathbb{C}(D(a;r))$ i per tant f admet primitiva $F \in H(D(a;r))$ tal que $F'(z) = f(z)$ en $D(a;r) \Rightarrow f \in H(D(a;r))$ en quant a derivada de F holomorfa

(2) Suposem $f \in H(D(a;r) \setminus \{a\})$ i $\lim_{z \to a} f(z) = \infty \Rightarrow f(z) \neq 0, \forall z \in D(a;r) \setminus \{a\}$; si triem $r > 0$ prou petit i $g(z) \stackrel{def.}{=} 1/f(z) \in H(D(a;r) \setminus \{a\})$ amb $\lim_{z \to a} g(z) = 0$. Per tant, g té una singularitat evitable en $z=a$ i $g \in H(D(a;r))$ si fem $g(a) = 0$,

És clar que $z=a$ és un zero aïllat de g i sigui $m \geq 1$ l'ordre d'aquest zero.
Sabem que, aleshores, $\exists\, \tilde{g} \in H(D(a;r))$, amb $\tilde{g}(z) \neq 0$ en $D(a;r)$, tal que
$$g(z) = (z-a)^m \cdot \tilde{g}(z) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m \cdot \tilde{g}(z)} = (z-a)^{-m} \cdot h(z), \text{ on } h = 1/\tilde{g} \in H(D(a;r))$$

(3) Suposem que $f \in H(D(a;r)\setminus\{a\})$ i que $\nexists \lim_{z\to a} f(z)$ (això és, el límit $\nexists$ en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Volem veure que $\forall \varepsilon > 0$, el conjunt $A_\varepsilon = f(D(a;\varepsilon)\setminus\{a\})$ és dens en $\mathbb{C}$, això és, $\overline{A_\varepsilon} = \mathbb{C}$ (la seva adherència és el total). Ho veurem per reducció a l'absurd; suposem $\exists\, b \in \mathbb{C}$ tal que $b \notin \overline{A_\varepsilon}$ i obtindrem una contradicció: $b \notin \overline{A_\varepsilon} \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $|f(z) - b| > \delta$, $\forall z \in D(a;\varepsilon)\setminus\{a\} \Rightarrow$
$$\Rightarrow g(z) \overset{\text{def.}}{=} \frac{z-a}{f(z)-b} \in H(D(a;\varepsilon)\setminus\{a\}) \text{ i } \lim_{z\to a} g(z) = 0 \Rightarrow g \text{ té una singularitat}$$
evitable en $z=a$ i si fem $g(a)=0$, aleshores $g \in H(D(a;\varepsilon)) \Rightarrow$
$$g(z) = \frac{z-a}{f(z)-b} = (z-a)^m \cdot h(z)$$ on $h \in H(D(a;\varepsilon))$ i $h(z) \neq 0$ en $D(a;\varepsilon)$ ($m \geq 1$ ordre del zero de g en $z=a$) $\Rightarrow f(z) = b + \dfrac{(z-a)^{1-m}}{h(z)} \in H(D(a;\varepsilon)\setminus\{a\})$. Així, si $m=1$ f té singularitat evitable en $z=a$ i si $m>1$ té un pol d'ordre $m-1$ en a. Contradicció.

- Representació local de funcions holomorfes en $D(a;r)\setminus\{a\}$ entorn de a

(1) $f \in H(D(a;r)) \Rightarrow f$ admet representació en termes de sèrie de potències:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \forall z \in D(a;r) \qquad \text{(Sèrie de Taylor)}$$

(2) $f \in H(D(a;r)\setminus\{a\})$ i f té un pol d'ordre m en $a \Rightarrow \exists h \in H(D(a;r)), h(a) \neq 0$:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} = (z-a)^{-m} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n}_{\text{taylor de } h} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n =$$

$$= \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots, \quad \forall z \in D(a;r)\setminus\{a\}$$

on $a_n = b_{n+m}$, amb $a_{-m} = b_0 = h(a) \neq 0$.

(3) $f \in H(D(a;r)\setminus\{a\})$ i f té una singularitat essencial en a:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots, \quad \forall z \in D(a;r)\setminus\{a\}.$$

Aquest darrer desenvolupament s'anomena Sèrie de Laurent de f en $D(a;r)\setminus\{a\}$ i, tot seguit l'anem a introduir (en un context més general).

- <u>Teorema</u> (Sèries de Laurent)

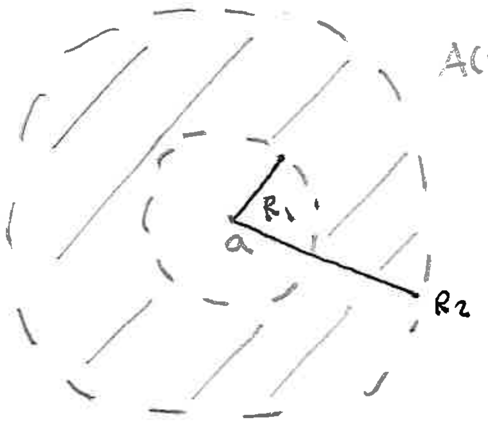
Siguin $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ i $A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$ l'anell obert comprès entre les circumferències de centre a i radis R_1 (interior) i R_2 (exterior). Si $f \in H(A(R_1,R_2))$, aleshores f admet un desenvolupament de la forma:

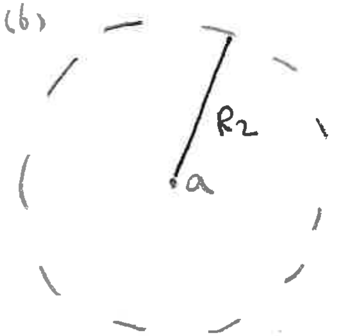
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \ \forall z \in A(R_1, R_2)$$ (Sèrie de Laurent de f en $A(R_1,R_2)$)

La convergència de la sèrie de Laurent de f és absoluta $\forall z \in A(R_1,R_2)$ i és uniforme en qualsevol $K \subset A(R_1,R_2)$ compacte (p.ex., $\overline{A(r_1,r_2)}$ on $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$).

A més, $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz$$, per qualsevol r tal que $R_1 < r < R_2$, essent el resultat per a_n independent del r triat (i per tant, la sèrie és única).

- <u>Comentaris</u>: (1) Exemples:

(a) 

(b) 

$A(0,R_2) = D(a;R_2) \setminus \{a\}$

(c) $A(R_1,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a;R_1)$

(d) $A(0,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(2) No cal que a sigui una singularitat aïllada de f (eventualment poden ser singularitats qualsevol $z \in \overline{D}(a, R_1)$ i no cal que ho sigui, p. ex, $z = a$).

(3) El desenvolupament de Laurent depèn de f i a, però també de l'anell triat. P. ex., fent $a=0$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ en } A(0,1) = D(0;1) \setminus \{0\} \quad \text{(sèrie de Taylor en } z=0\text{)}.$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -z^n \text{ en } A(1, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0;1) \text{ ja que } \left|\frac{1}{z}\right| < 1.$$

(4) Si ens donen una sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$, el seu anell de convergència és $A(R_1, R_2)$ on $\frac{1}{R_2} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i $R_1 = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$

(és clar que si $R_2 < R_1$ llavors l'anell de convergència és el conjunt buit).

– Demostració (teorema sèries de Laurent)

Donada $f \in H(A(R_1, R_2))$, on $A(R_1, R_2) = \{R_1 < |z-a| < R_2\}$, triem $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ i considerem el cicle $\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$ on $\Gamma_1 = \partial D(a; r_1)^+$ i $\Gamma_2 = \partial D(a; r_2)^+$.

Clarament $\Gamma \sim 0$ en $A(R_1, R_2)$. Aleshores, com que $f \in H(A(R_1, R_2))$, podem usar la fórmula de Cauchy global per calcular $f(z)$ usant Γ.

Concretament, si $z \in A(r_1, r_2)$, es té $n(\Gamma, z) = 1$ i per tant ($\Gamma_j = \partial D(a; r_j)^+$):

$$f(z) = n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

- Si fixem $z \in A(r_1, r_2)$ i triem $w \in \partial D(a, r_2)$ es té $|z-a| = r_0 < r_2$ i $|w-a| = r_2$. Per tant,

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \frac{r_0}{r_2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n$$ és uniformement convergent com a funció de $w \in \partial D(a, r_2)$.

Així:
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)\left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

- Si fixem $z \in A(r_1, r_2)$ i triem $w \in \partial D(a; r_1)$ es té $|z-a| = r_0 > r_1$ i $|w-a| = r_1$. Per tant:

$$\left| \frac{w-a}{z-a} \right| = \frac{r_1}{r_0} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n$$ és uniformement convergent com a funció de $w \in \partial D(a, r_1)$.

Així:
$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(w) (w-a)^n\, dw \right) \cdot (z-a)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1} (z-a)^{-n-1}$$

Així $\forall z \in A(r_1, r_2)$ hem vist:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{-m-1}(z-a)^{-m-1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m (z-a)^m,$$

on: $a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r_2)^+} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,dw$, si $m \geq 0$

$$a_{-m-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r_1)^+} f(w)(w-a)^m\,dw, \text{ si } m \geq 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \left\{\begin{array}{l} m=-m-1 \\ m=-m-1 \end{array}\right.}}{\Rightarrow} a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r_1)} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,dw, \text{ si } m \leq -1.$$

Finalment:

(1) Hem calculat a_m usant una integral sobre $\partial D(a;r_2)^+$, si $m \geq 0$, i una integral sobre $\partial D(a;r_1)^+$, si $m \leq -1$. Però el resultat per aquestes integrals és el mateix si integrem sobre $\partial D(a;r)^+$, $\forall R_1 < r < R_2$, ja que $\forall m \in \mathbb{Z}$ es té $\frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}} \in H(A(R_1,R_2))$ i $\partial D(a;r)^+ - \partial D(a;r_1)^+ \sim 0$ en $A(R_1,R_2)$. Per tant,

$$\int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,dw - \int_{\partial D(a;r_1)^+} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,dw = 0 \quad (\text{ídem per } R_2)$$

(2) La convergència absoluta de $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m$ i uniforme sobre compacts continguts en $D(a;R_2)$ és òbvia, ja que és una sèrie de potències. Per $\sum_{m=-\infty}^{-1} a_m (z-a)^m$ tot és anàleg, però ara en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a;R_1)$ (però no en fem els detalls). D'aquí es segueix la convergència absoluta i uniforme sobre compactes de la sèrie de Laurent de f en $A(R_1,R_2)$.

- Teorema dels residus

Pel teorema integral de Cauchy global, sabem que si $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $\Gamma \subset \Omega$ un cicle tal que $\Gamma \sim 0$ en Ω, aleshores $\int_\Gamma f = 0$. Però què succeeix si f té una o més singularitats aïllades envoltades per Γ? Quina és la contribució d'aquestes singularitats a $\int_\Gamma f$? Un exemple ens el dona la fórmula de Cauchy global, ja que $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot n(\Gamma, a) \cdot f(a)$, ja que en aquest cas la funció $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ que integrem té una singularitat aïllada en $z = a$. Com veurem en la definició següent, $f(a) = \text{Res}(g(z), a)$.

- **Def.:** Residu d'una singularitat aïllada d'una funció holomorfa

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$ i a singularitat aïllada de f.

Aleshores, definim el residu de f en a com:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a;\varepsilon)^+} f(z)\, dz \;,$$ on $\varepsilon > 0$ és prou petit per tal que

$D(a;\varepsilon) \setminus \{a\} \subset \Omega$ i $D(a,\varepsilon)$ no conté cap altra singularitat de f diferent del punt a (la definició no depèn del $\varepsilon << 1$ triat)

- <u>Observació:</u> Si $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ és la sèrie de Laurent de $f(z)$ entorn d'una singularitat aïllada $z=a$, aleshores $\text{Res}(f,a)=a_{-1}$. Això és, el coeficient de $\frac{1}{z-a}$ en la sèrie de Laurent (tant si a pol o essencial):

$$f(z)=\dots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\dots$$

Raó? És clar que si $n\neq-1$, aleshores $(z-a)^n=\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}\right)$ i per tant $(z-a)^n$ admet primitiva holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ i, per tant, $f(z)-\frac{a_{-1}}{z-a}$ admet primitiva holomorfa en $D(a;r)\setminus\{a\}$, si r és prou petit. Per tant, es té

$$\int_{\partial D(a,\varepsilon)^+}\left(f(z)-\frac{a_{-1}}{z-a}\right)dz=0 \Rightarrow \int_{\partial D(a,\varepsilon)^+} f(z)\,dz=\int_{\partial D(a,\varepsilon)^+}\frac{a_{-1}}{z-a}\,dz=a_{-1}\cdot 2\pi i$$

- <u>Teorema</u> (dels residus)

$\Omega\subset\mathbb{C}$ obert, $f\in H(\Omega\setminus\{a_j\})$ on $\{a_j\}$ successió finita o numerable de singularitats aïllades de f en Ω. Sigui $\Gamma\subset\Omega$ un cicle homòleg a zero en Ω i tal que $a_j\notin\Gamma$ per cap j. Aleshores:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_j n(\Gamma,a_j)\cdot\text{Res}(f,a_j)$$

(la suma sempre és "finita" ja que $n(\Gamma,a_j)\neq 0$ només per un conjunt finit de j's)

— <u>Demostració</u>: Sabem que $n(\Gamma, z) = 0$ si z pertany a la component connexa no acotada. Per tant, el conjunt suport$(n(\Gamma,\cdot)) \cup \Gamma$ és un conjunt compacte de Ω (suport$(n(\Gamma,\cdot)) = \{z \in \mathbb{C} : n(\Gamma, z) \neq 0\}$). Per tant, de totes les singularitats aïllades $\{a_j\}$ de f en Ω, com a molt una quantitat finita d'elles, que denotem per $a_1, a_2, \dots, a_m$, poden ser d'aquest compacte i complir $n(\Gamma, a_j) \neq 0$ (si hi hagués un nombre infinit de singularitats en el compacte, tota successió definida per elles tindria una parcial convergent que donaria lloc a un punt d'acumulació de $\{a_j\}$ en Ω). Definim ara $\Omega' = \Omega \setminus \{a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ on $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ són singularitats de f en Ω complint $n(\Gamma, a_j) = 0$, $\forall j \geq m+1$.

És clar que: (i) $f \in H(\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_m\})$; (ii) $\Gamma \sim 0$ en Ω'.

Ara, $\forall j = 1, \dots, m$, triem $\varepsilon_j > 0$ prou petit per tal que: $D_j = D(a_j, \varepsilon_j) \subset \Omega \setminus \Gamma$ i $a_k \notin D_j$ si $a_k \neq a_j$, $\forall k \geq 1$. Usem aquests discos per definir el cicle:

$\Gamma' = n(\Gamma, a_1) \cdot \partial D_1^+ + \dots + n(\Gamma, a_m) \cdot \partial D_m^+$. És clar que $\Gamma \sim \Gamma'$ en $\Omega' \setminus \{a_1, \dots, a_m\} = \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$ ja que si $z \notin \Omega' \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ hi ha 2 opcions:

(i) $z \notin \Omega'$: $n(\Gamma, z) = n(\Gamma', z) = 0$

(ii) $z = a_j$, per algun $j = 1, \dots, m$: $n(\Gamma, z_j) = n(\Gamma', z_j)$.

Així doncs, el teorema integral de Cauchy global ens diu que: $\int_{\Gamma-\Gamma'} f(z)dz$, d'on:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(z)dz = n(\Gamma, a_1)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1^+} f(z)dz\right) + \dots + n(\Gamma, a_m)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_m^+} f(z)dz\right) =$$

$$= n(\Gamma, a_1)\,\mathrm{Res}(f, a_1) + \dots + n(\Gamma, a_m)\cdot\mathrm{Res}(f, a_m).$$

- Proposició: $z=a$ pol d'ordre $k\geq 1$ d'una funció holomorfa f. Llavors:

1) Si $k=1$: $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

2) Si $k>1$: $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k f(z)\right)$.

- Demostració: Exercici. Substituir $f(z)$ per la seva sèrie de Laurent en $z=a$ i veiem que en tots els casos el resultat del límit ens dóna $a_{-1} = \mathrm{Res}(f,a)$.

- Comentaris:

(a) És clar que si f és holomorfa en a (o hi té singularitat evitable): $\mathrm{Res}(f,a)=0$.

(b) Les fórmules anteriors NO valen si a singularitat essencial.

(c) Si f té un pol simple en a i g holomorfa en a: $\mathrm{Res}(f\cdot g, a) = g(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$.

(d) Per calcular els límits anteriors val usar la regla de L'Hôpital:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1} = 1 \quad \left(\text{ja que } z=0 \text{ pol simple de } \frac{1}{\sin z}\right)$$

- Def.: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega \setminus \{a_j\})$, on $\{a_j\}$ successió finita o numerable de singularitats aïllades de f. És diu que f és una funció meromorfa en Ω si totes les singularitats són de tipus pol (i no tenen cap punt d'acumulació en Ω).

- Exemple: $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow f/g$ és meromorfa en Ω (si $g \not\equiv 0$).

- Teorema (Principi de l'argument)

Sigui f meromorfa en Ω amb zeros $\{a_j\}$ i pols $\{b_k\}$ (successions finites o numerables de punts aïllats). Sigui $\Gamma \subset \Omega$ un cicle $\Gamma \sim 0$ i tal que $a_j, b_k \notin \Gamma$ per cap j, k. Aleshores:

$$n(f(\Gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(\Gamma, a_j) - \sum_k n(\Gamma, b_k)$$

, on:

(1) Ambdues sumes són finites, en el sentit que $n(\Gamma, a_j) \neq 0$ i $n(\Gamma, b_k) \neq 0$ només per un nombre finit de j's i k's.

(2) En ambdues sumes, a_j i b_k estan comptats amb la seva multiplicitat: això és, a_j apareix repetit tants cops com la seva multiplicitat com a zero de f i b_k apareix repetit tants cops com el seu ordre com a pol de f.

- Demostració: Primerament, observem que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$ és una parametrització C^1 d'una corba Γ en $\mathbb{C}$ i $f(z)$ una funció holomorfa en un entorn de Γ, aleshores $(f\circ\gamma) : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(\gamma(t))$ parametritza $f(\Gamma)$ i es té que $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.

Així doncs; $\int_{f(\Gamma)} g(z)\,dz = \int_\Gamma g(f(w))\cdot f'(w)\,dw$, que ve a ser l'anàleg del que obtenim si fem un canvi de variable de la forma $z = f(w)$ i $dz = f'(w)\,dw$ en una integral convencional d'una funció d'una variable. Si triem $g(z) = 1/z$ i Γ és una corba tancada o un cicle, llavors:

$$n(f(\Gamma),0) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\Gamma)} \frac{dz}{z-0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

Totes les possibles singularitats de $f'(w)/f(w)$ envoltades per Γ venen donades o bé per zeros $\{a_j\}$ de f o per pols $\{b_k\}$ de f. Així doncs, pel teorema dels residus:

$$n(f(\Gamma),0) = \sum_j n(\Gamma,a_j)\cdot \operatorname{Res}(f'/f, a_j) + \sum_k n(\Gamma,b_k)\cdot \operatorname{Res}(f'/f, b_k) \quad \text{(suma finita)}$$

- Sigui a un zero d'ordre (o multiplicitat) m de $f \Rightarrow f(z) = (z-a)^m h(z)$, on $h(z)$ és holomorfa entorn de a i $h(a) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = m(z-a)^{m-1} h(z) + (z-a)^m h'(z)$.

Així; $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{m}{z-a} + \dfrac{h'(z)}{h(z)} \Rightarrow \text{Res}\left(f'/f, a\right) = m$, ja que h'/h holomorfa entorn a.

- Sigui b un pol d'ordre m de $f \Rightarrow f(z) = (z-a)^{-m} h(z)$, on $h(z)$ holomorfa entorn de a i $h(a) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = -m(z-a)^{-m-1} h(z) + (z-a)^{-m} h'(z)$.

Així: $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = -\dfrac{m}{z-b} + \dfrac{h'(z)}{h(z)} \Rightarrow \text{Res}(f'/f, b) = -m$, ja que h'/h holomorfa entorn b.

- Per tant, de fet hem provat:

$$n(f(\Gamma), 0) = \sum_{\substack{a \in \Omega \\ \text{zero de } f}} Z(f,a) \cdot n(\Gamma, a) - \sum_{\substack{b \in \Omega \\ \text{pol de } f}} P(f,b) \cdot n(\Gamma, b),$$

$Z(f,a) \equiv$ multiplicitat de a com zero de f. $P(f,b) \equiv$ ordre de b com a pol de f

– Corol·lari (Teorema de Rouché)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $\Gamma \subset \Omega$ cicle homòleg a zero en Ω i tal que $\forall z \in \Omega \setminus \Gamma$ es té $n(\Gamma, z) = 0$ o bé $n(\Gamma, z) = 1$. Siguin $f, g \in H(\Omega)$ tals que: $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in \Gamma$. Llavors, f i g tenen el mateix nombre de zeros [illegible] (comptats amb la seva multiplicitat) encerclats per Γ.

- <u>observacions</u>:

(a) En l'enunciat del t^a. de Rouché s'entén que la regió encerclada per Γ són els punts $z \in \Omega$ tals que $n(\Gamma, z) = 1$

(b) La desigualtat $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ en Γ ens diu que ni f ni g tenen zeros en Γ.

- <u>Demostració</u> (Teorema de Rouché)

Com que $f(z) \neq 0$ i $g(z) \neq 0$ en Γ i $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ en $\Gamma \Rightarrow |F(z)-1| < 1$ en Γ, on $F(z) = g(z)/f(z)$ és una funció meromorfa en Ω que no té ni zeros ni pols en Γ.

La desigualtat $|F(z)-1| < 1$ en Γ ens diu que $F(\Gamma) \subset D(1;1)$ i per tant $F(\Gamma)$ <u>no</u> envolta l'origen $\Rightarrow n(F(\Gamma), 0) = 0$. Aleshores, pel principi de l'argument:

$$0 = n(F(\Gamma), 0) = \#\left\{\begin{array}{l}\text{zeros de } F \text{ encerclats per } \Gamma \\ \text{comptats amb la seva multiplicitat}\end{array}\right\} - \#\left\{\begin{array}{l}\text{Pols de } F \text{ encerclats per } \Gamma \\ \text{comptats amb la seva multiplicitat}\end{array}\right\} =$$

$(\# A = \text{Cardinal de } A)$

$$= \#\left\{\begin{array}{l}\text{zeros de } g \text{ encerclats per } \Gamma \\ \text{comptats amb la seva multiplicitat}\end{array}\right\} - \#\left\{\begin{array}{l}\text{zeros de } f \text{ encerclats per } \Gamma \\ \text{comptats amb la seva multiplicitat}\end{array}\right\}$$

observem que és clar que els zeros de $F = g/f$ venen dels zeros de g i els pols de F dels zeros de f. En el cas que $f(a) = g(a) = 0$ per algun $a \in \Omega$ encerclat per Γ, aleshores la fórmula continua sent certa en termes de la diferència de les seves multiplicitats.

- <u>Exemple</u>: Donat el polinomi de grau n $g(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ amb $a_n \neq 0$, usem el teorema de Rouché per donar un valor $R_0>0$ que garanteixi que tots els zeros de g són en $D(0;R_0)$.

Fem $f(z)=a_n z^n$ i $\Gamma = \partial D(0;R_0)^+$, per un cert $R_0 \geq 1$ a determinar. És clar que $f(z)$ té el seu únic zero, de multiplicitat n, $z=0$ envoltat per Γ.

Així: $|g(z)-f(z)| = |a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z + a_0| \leq |a_{n-1}|\cdot R_0^{n-1}+\cdots+|a_1|R_0+|a_0| \leq$

$$\leq (|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)\, R_0^{n-1} = A\cdot R_0^{n-1}, \quad \text{si } z\in\partial D(0;R_0)^+$$

on $A=|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|$.

Per l'altra banda: $|f(z)| = |a_n z^n| = |a_n|\cdot R_0^n$, si $z\in\partial D(0;R_0)^+$

Si volem $|g(z)-f(z)|<|f(z)|$, $\forall z\in\partial D(0;R_0)^+$, cal $A R_0^{n-1} < |a_n| R_0^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_0 > A/|a_n|$.

Per tant, si $R_0 \geq 1$ i $R_0 > \dfrac{|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$, aleshores els n zeros de $g(z)$ són en $D(0;R_0)$.

- **Def.:** Sigui $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la compactificació del pla complex per un punt. Direm que un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ és simplement connex si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ té una única component connexa. (P.ex., $\Omega = D(0;1)$ és simplement connex però $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no ho és ja que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega = \{0, \infty\}$.)

- **Proposició:** Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Són equivalents:

(i) Ω és simplement connex.

(ii) Per a tot cicle Γ contingut en Ω es té $\Gamma \sim 0$ en Ω.

(iii) Per a tota $f \in H(\Omega)$, existeix $F \in H(\Omega)$ una primitiva holomorfa de f tal que $F' = f$.

(iv) Per a tota funció $f \in H(\Omega)$ i per a tot cicle $\Gamma \subset \Omega$ es satisfà $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

(v) Per a qualsevol $f \in H(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, existeix una funció $g \in H(\Omega)$ tal que $f = e^g$ (Per tant, podem definir $g = \log f$ una determinació o branca holomorfa del logaritme de f en Ω).

- **Demostració:**

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (i) \arrow[d, Leftrightarrow] & \\ (iv) \arrow[dr, Rightarrow] & (ii) \arrow[l, Rightarrow] & (v) \arrow[l, Rightarrow] \\ & (iii) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Veurem l'equivalència de tots els punts de l'enunciat usant aquest esquema d'implicacions.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ connex i $\Gamma \subset \Omega$ cicle vol dir que si $z \notin \Omega$ ha de viure a la component connexa no acotada determinada per Γ. En aquest cas, sabem que $n(\Gamma, z) = 0$ si z està en aquesta component connexa no acotada $\Rightarrow$ $\Gamma \sim 0$ en Ω

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Suposem que $\forall \Gamma \subset \Omega$ cicle ~~es~~ té $\Gamma \sim 0$ en Ω. Volem veure que llavors Ω domini simplement connex. Suposem que Ω no és simplement connex i obtindrem una contradicció en forma d'un cicle $\Gamma \subset \Omega$ que no és homòleg a zero en Ω.
Concretament, Ω no simplement connex vol dir que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega = A \cup B$ unió disjunta de dos tancats no buits, un dels quals, p. ex. B, ha de contenir el punt de l'infinit (observem que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ és tancat). Aleshores, $A \subset \Omega^c$ és un tancat acotat i per tant un compacte de $\mathbb{C}$. Així la funció $d: A \longrightarrow [0, +\infty)$, $z \longmapsto d(z) = dist(z, B)$, definida per $d(z) = dist(z, B) = \inf\{|z-w| : w \in B\}$ és una funció contínua en el compacte A, que ha d'assolir el seu valor mínim d_0 per algún $z_0 \in A$. Aquest mínim no pot ser zero, ja que llavors $z_0 \in A$ i $z_0 \in B$. En conseqüència, $|z-w| \geq d_0 > 0$ $\forall z \in A$ i $\forall w \in B$, i els dos conjunts tenen entre ells una "franja" de separació d'amplada $d_0 > 0$ (observació: el cas ~~en~~ que $B = \{\infty\}$ cal analitzar-lo a part).
Atenció que A no té per què ser connex, però sí que podem usar aquesta franja de separació entre A i B per generar una corba tancada Γ que envolti alguna component connexa de A i que no talli ni A ni B. Així, $\Gamma \subset \Omega$ i $n(\Gamma, z) \neq 0$ per algún $z \in A$. Contradicció!

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iv)}$ Suposem que $\forall$ cicle $\Gamma \subset \Omega$ es té $\Gamma \sim 0$ en Ω. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy és clar que si $f \in H(\Omega)$ es té $\int_\Gamma f = 0$

$\boxed{(iv) \Rightarrow (iii)}$ Suposem que $\forall$ cicle $\Gamma \subset \Omega$ i $\forall f \in H(\Omega)$ es té $\int_\Gamma f = 0$. Aleshores, volem veure que f admet una primitiva holomorfa F definida en tot Ω. Per fer-ho, fixem $z_0 \in \Omega$ i considerem un camí Γ_z qualsevol amb origen z_0 i final z. Definim:

$F(z) = \int_{\Gamma_z} f$. És clar que la definició és independent del camí triat, ja que si Γ_z' també uneix z_0 i z aleshores $\Gamma = \Gamma_z - \Gamma_z'$ és un camí tancat en Ω i, per tant, $\int_\Gamma f = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \int_{\Gamma_z'} f = \int_{\Gamma_z} f$. Ara és qüestió de repetir els arguments ja fets en la prova del teorema d'existència local de primitives (en un disc) per veure que $F \in H(\Omega)$ i $F' = f$ en Ω. (Pensem que per fer-ho, només ens cal pensar en la definició de F en termes de corbes Γ_z poligonals amb costats paral·lels als eixos coordenats). Ometem els detalls.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (v)}$ Suposem que $\forall f \in H(\Omega)$ existeix $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.

Suposem ara que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega \Rightarrow f'/f \in H(\Omega) \Rightarrow \exists F \in H(\Omega)$ t.q. $F' = f'/f \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \cdot e^{-F})' = 0$ en Ω (càlcul ja vist) $\Rightarrow f \cdot e^{-F} = K = \text{const}$ en Ω, amb $K \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Expressem $K = e^c$, per un cert $c \in \mathbb{C}$ i $f = Ke^F = e^{c+F}$ en $\Omega \Rightarrow f = e^g$ on $g = c + F \in H(\Omega)$.

$\boxed{(v) \Rightarrow (ii)}$ Suposem que $\forall f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$, $\exists\, g \in H(\Omega)$ t.q. $e^g = f$. Volem veure ara que aleshores si $\Gamma \subset \Omega$ és un cicle es té $\Gamma \sim 0$ en Ω. Això vol dir que, $\forall w \notin \Omega$, es té $n(\Gamma, w) = 0$. Fixat aquest w, considerem la funció $f(z) = z - w \in H(\Omega)$ i complint $f(z) \neq 0$ en Ω. Per tant, $\exists\, g \in H(\Omega)$ t.q.

$$e^{g(z)} = f(z) = z - w \Rightarrow e^g \cdot g' = 1 \text{ en } \Omega \Rightarrow g'(z) = \frac{1}{e^{g(z)}} = \frac{1}{z-w}, \forall z \in \Omega.$$

Ara calculem $n(\Gamma, w) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g'\, dz = 0$ en quant la integral de g' és zero sobre tota corba tancada continguda en Ω perquè ~~té~~ admet una primitiva g en tot $\Omega \Rightarrow \Gamma \sim 0$ en Ω.