• Teoria local de Cauchy

Un cop introduïdes les funcions holomorfes, com a funcions $\mathbb{C}$-diferenciables en un obert de $\mathbb{C}$, ara toca estudiar les seves propietats bàsiques des d'una perspectiva "local", això és, aquelles propietats que podrem inferir a partir del coneixement dels valors de la funció en un disc, i sense atendre a la topologia del domini obert de $\mathbb{C}$ en el qual estiguin definides. Concretament, veurem que tota funció holomorfa és localment representable mitjançant una sèrie de potències, centrada en el punt triat, que és convergent en tot disc entorn d'aquest punt on la funció sigui holomorfa. D'aquí obtenim que la $\mathbb{C}$-diferenciabilitat (1 derivada) implica automàticament el seu caràcter C^∞ i la també la seva infinita $\mathbb{C}$-diferenciabilitat. El punt clau, és usar la $\mathbb{C}$-diferenciabilitat per establir una representació integral local de les funcions holomorfes.

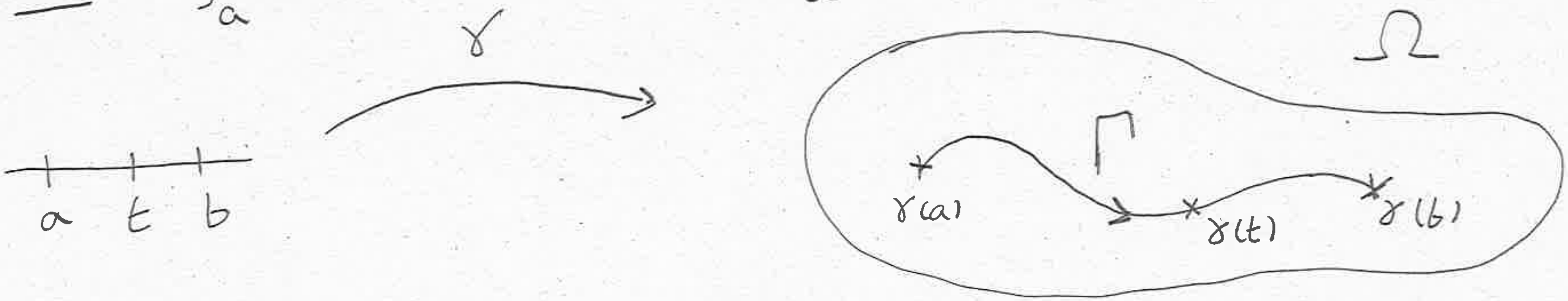
- <u>Def.</u>: Integral de línea o sobre Camins

- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert.
- Γ arc de corba en Ω orientat (un camí)
- $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ una parametrització de Γ que és C^1 a trossos i compatible amb l'orientació triada.
  $t \longmapsto \gamma(t)$

Definim la integral de f al llarg del camí Γ com:

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

- <u>obs.</u>: $\int_a^b (u(t) + i \cdot v(t))\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$



- Propietats integral sobre camins:

(1) $\int_\Gamma f$ és independent de la parametrització triada

- $\tau : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ un canvi de paràmetre : τ C^1 a trossos, estrictament creixent i bijectiva

$s \longmapsto t = \tau(s)$

- $\delta : [c,d] \longrightarrow \Omega$ re-parametrització de Γ

$s \longmapsto \delta(s) := \gamma(\tau(s))$

Llavors:

$$\int_c^d f(\delta(s)) \cdot \delta'(s)\, ds = \int_c^d f(\gamma(\tau(s))) \cdot \gamma'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)\, ds =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Canvi de variables : $t = \tau(s) \rightarrow dt = \tau'(s)\, ds$

(2) Linealitat : $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_\Gamma (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_\Gamma f + \mu \int_\Gamma g \quad , \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

(3) Camí oposat

Denotarem per $-\Gamma$ al camí Γ recorregut en sentit contrari.

Si $\begin{array}{l}\gamma:[a,b]\longrightarrow\Omega \\ \quad t \longmapsto \gamma(t)\end{array}$ parametritza Γ, aleshores $\begin{array}{l}\gamma^*:[-b,-a]\longrightarrow\Omega \\ \quad t \longmapsto \gamma(-t)\end{array}$

o també $\begin{array}{l}\gamma^*:[a,b]\longrightarrow\Omega \\ \quad t \longmapsto \gamma(b+a-t)\end{array}$ parametritzen $-\Gamma$.

És fàcil veure $\displaystyle\int_{-\Gamma} f = -\int_{\Gamma} f$.

(4) Suma de camins

Si Γ i Σ són dos camins en que l'extrem final d'un d'ells és l'origen del següent, llavors els podem concatenar per formar-ne un de nou $\Gamma \vee \Sigma$.

Llavors:

$$\int_{\Gamma\vee\Sigma} f = \int_{\Gamma} f + \int_{\Sigma} f$$

(5) Acotació de la integral

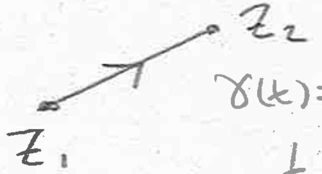
$$\left| \int_\Gamma f \right| \leq \sup_{z\in\Gamma} \{|f(z)|\} \cdot \mathrm{Long}(\Gamma).$$

En efecte:

$$\left| \int_\Gamma f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \sup_\Gamma \{|f|\} \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt}_{\mathrm{Long}(\Gamma)}$$

→ Notació: Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, llavors $[z_1, z_2]$ és el segment en $\mathbb{C}$ que uneix z_1 amb z_2, que admet la parametrització



$\gamma(t) = (1-t) z_1 + t \cdot z_2$

$t \in [0,1]$

$\gamma'(t) = z_2 - z_1$

• P. ex.: Si $a, b \in \mathbb{R}$ llavors

$$\int_{[a,b]} f(z)\, dz = \int_0^1 f((1-t)a + t\cdot b) \cdot (b-a)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx$$

$x = (1-t)a + t \cdot b$

$dx = (b-a)\, dt$

- **Exemple 1:** $\gamma(t) = (1-t)z_1 + t\cdot z_2$, $t \in [0,1]$, $\gamma'(t) = z_2 - z_1$

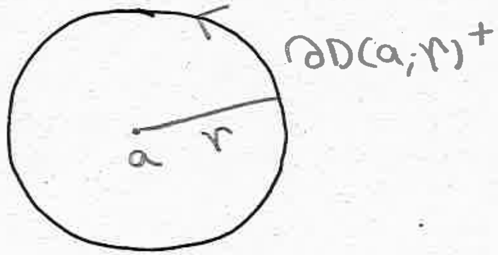
$$\int_{[z_1,z_2]} z^n \, dz \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 [(1-t)z_1 + t\cdot z_2]^n (z_2 - z_1)\, dt = \left. \frac{[(1-t)z_1 + t\cdot z_2]^{n+1}}{n+1} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$

- **Exemple 2:** $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a;r)^+} \frac{dz}{z-a} = 1.$ $\quad (a \in \mathbb{C},\ r > 0)$

$$\int_{\partial D(a;r)^+} \frac{dz}{z-a} \overset{\text{def.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{it}}{r e^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

$\gamma(t) = a + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = r i e^{it}$



- **Proposició:** $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $\Gamma \subset \Omega$ camí d'extrems z_1 i z_2.

Si $F \in H(\Omega) \Rightarrow \displaystyle\int_\Gamma F'(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1).$

(En particular: Si Γ camí tancat $\Rightarrow \displaystyle\int_\Gamma F' = 0$)

- Demostració (Proposició) : $\gamma:[a,b]\to\Omega$ t.q. $\gamma(a)=z_1$ i $\gamma(b)=z_2$

Recordem: $\frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))=\frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)+\frac{\partial F}{\partial\bar z}(\gamma(t))\cdot\overline{\gamma'(t)}=F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t).$

$\boxed{F\in H(\Omega)\Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial\bar z}=0 \text{ i } F'=\frac{\partial F}{\partial z}}$

Llavors:

$$\int_\Gamma F'\overset{\text{def.}}{=}\int_a^b F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_a^b\frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))\,dt=F(\gamma(t))\Big|_{t=a}^{t=b}=F(z_2)-F(z_1)$$

- Així doncs, si volem calcular $\int_\Gamma f(z)\,dz$, el natural sembla buscar una "primitiva" $F(z)$ de $f(z)$ t.q. $F'(z)=f(z)$; un "primitiva" s'entén aquí en termes de derivada holomorfa. Però, com veurem, les úniques funcions $f(z)$ que admeten primitiva holomorfa són les holomorfes.

- Per veure doncs que una funció $f(z)$ no admet primitiva holomorfa:

(a) Imposar les condicions de que $F'(z)=f(z)$ en termes de les condicions de Cauchy-Riemann i veure que són incompatibles.

(b) (Més fàcil) Trobar un camí tancat Γ t.q. $\int_\Gamma f\neq 0$ o bé dos camins no tancats Γ_1 i Γ_2, amb mateix origen i final, tal que $\int_{\Gamma_1}f\neq\int_{\Gamma_2}f$

– <u>Exemple</u>: $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$, $\forall z\in\mathbb{C}$, <u>no admet</u> cap "primitiva" $F(z)$ holomorfa.

(a) Busquem $F=u+iv$ t.q. $F'=f$. Cal:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ F'=u_x+iv_x=f=x^2+y^2 \Rightarrow u_x=x^2+y^2,\ v_x=0 \\ \bullet\ u_x=v_y,\ u_y=-v_x \text{ (Cauchy-Riemann per } F\text{)}. \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x=v_y=x^2+y^2 \\ v_x=-u_y=0 \end{array}\right.$$

$u_y=0 \Rightarrow u=u(x) \Rightarrow u'(x)=x^2+y^2$ No POT SER !

(b) triem $z_1=-1$ i $z_2=1$ i unim aquests dos punts per dos camins diferents: $\Gamma_1=[-1,1]$ (segment) i $\Gamma_2=$ mitja circumferència en el semi-pla $y\leq 0$ (ó $\mathrm{Im}(z)\leq 0$) unint z_1 i z_2. Anem a veure que integrar $f(z)$ sobre els dos camins dóna resultats diferents:

$$\bullet \int_{\Gamma_1} f \underset{\uparrow}{=} \int_{-1}^{1} |\gamma_1(t)|^2\cdot\gamma_1'(t)\,dt=\int_{-1}^{1} t^2\,dt=2/3$$

$\gamma_1(t)=t$, $t\in[-1,1]$, $\gamma_1'(t)=1$

$$\bullet \int_{\Gamma_2} f \underset{\uparrow}{=} \int_{\pi}^{2\pi} |\gamma_2(t)|^2\cdot\gamma_2'(t)\,dt=\int_{\pi}^{2\pi} i e^{it}\,dt=e^{it}\Big|_{t=\pi}^{t=2\pi}=e^{i2\pi}-e^{i\pi}=1-(-1)=2$$

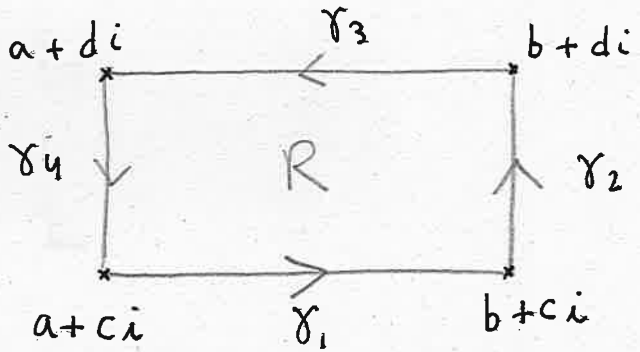
$\gamma_2(t)=e^{it}$, $t\in[\pi,2\pi]$, $\gamma_2'(t)=ie^{it}$

- <u>Proposició</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in C^1(\Omega)$, $R = [a,b] \times [c,d] \subset \Omega$.

Aleshores: $\displaystyle\iint_R \frac{\partial f}{\partial \bar z}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial R^+} f(z)\,dz$ (fórmula Green per rectangles).

- <u>Corol·lari</u>: $f \in H(\Omega) \cap C^1(\Omega) \Rightarrow \displaystyle\int_{\partial R^+} f(z)\,dz = 0$ (ja que $f \in H(\Omega) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$).

- <u>Demostració</u> (proposició): $\partial R^+ = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4 = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee (-\gamma_3^*) \vee (-\gamma_4^*)$.



$$\int_{\partial R^+} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f - \int_{\gamma_3^*} f - \int_{\gamma_4^*} f$$

on $\gamma_3^* = -\gamma_3$, $\gamma_4^* = -\gamma_4$

observem que $f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f_x, f_y$ contínues i podem usar Fubini en integrar-les en R.

$$\iint_R f_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f_y(x,y)\,dy = \int_a^b (f(x,d) - f(x,c))\,dx = \int_{\gamma_3^*} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

$$\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f_x(x,y)\,dx = \int_c^d (f(b,y) - f(a,y))\,dy = -i\int_{\gamma_2} f(z)\,dz + i\int_{\gamma_4^*} f(z)\,dz$$

• P. ex.: $\gamma_4^*(y) = a + i y$, $y \in [c,d]$, $(\gamma_4^*)'(y) = i$

$$\int_{\gamma_4^*} f(z)\,dz = \int_c^d f(a,y)\cdot i\,dy \Rightarrow i\int_{\gamma_4^*} f(z)\,dz = -\int_c^d f(a,y)\,dy$$

Finalment, recordem $f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$:

$$\iint_R f_{\bar z}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_R f_x(x,y)\,dx\,dy + \frac{i}{2}\iint_R f_y(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-i\int_{\gamma_2} f(z)\,dz - i\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right\} + \frac{i}{2}\left\{-\int_{\gamma_3} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right\} = \frac{1}{2i}\int_{\partial R^+} f(z)\,dz$$

– Com hem apuntat al corol·lari anterior, aquest resultat ens diu que si $f \in H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ llavors $\int_{\partial R^+} f = 0$ ... Però, en principi, la definició de f holomorfa no implica necessariament que f sigui C^1. A posteriori, veurem que f holomorfa implica f és C^1, però el fet de no poder usar aquest fet a priori complica els aspectes tècnics de la prova de la "fórmula de Cauchy local", i obliga a usar arguments com el del Teorema de Cauchy - Goursart que veiem tot seguit.

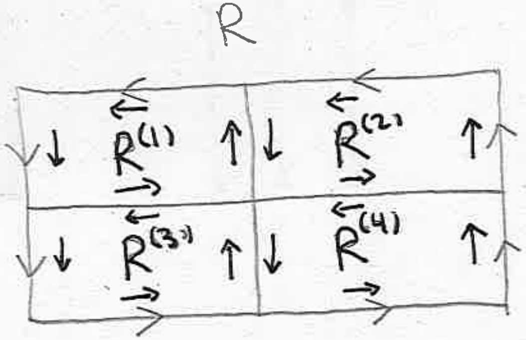
- **Teorema** (Cauchy-Goursat)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $w \in \Omega$ i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{w\})$. Sigui $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle t.q. $R \subset \Omega$. Aleshores: $\int_{\partial R^+} f(z)\,dz = 0$

- **Demostració**:

$\boxed{\text{Cas 1}}$ $\boxed{\text{Suposem } w \notin R}$ $\Rightarrow f \in H(R)$ (i a més contínua, clar!)

Notació: $\eta(R) := \int_{\partial R^+} f$. Volem veure $\eta(R) = 0$



Descomposem $R = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup R^{(4)}$ unió de 4 rectangles del mateix tamany com els de la figura. Aleshores:

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)}).$$

Sigui $k \in \{1,2,3,4\}$ t.q. $\max_{j \in \{1,2,3,4\}} \{|\eta(R^{(j)})|\} = |\eta(R^{(k)})|$. Li diem $R_1 = R^{(k)}$.

És clar que $|\eta(R_1)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|$, ja que en cas contrari tindríem:

$|\eta(R_1)| < \frac{1}{4}|\eta(R)| \Rightarrow |\eta(R^{(j)})| \leq |\eta(R_1)| < \frac{1}{4}|\eta(R)|$ i, finalment:

$|\eta(R)| \leq \sum_{j=1}^{4} |\eta(R^{(j)})| < \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{4}|\eta(R)| = |\eta(R)|$ contradicció!

Repetint el procés per $R_1 = R_1^{(1)} \cup R_1^{(2)} \cup R_1^{(3)} \cup R_1^{(4)}$, i així successivament, obtenim una successió de rectangles $R_0 := R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots$ verificant que R_n té tamany $1/4$ de R_{n-1} i $|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})| \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} |\eta(R_n)| \geq 4^{-n}|\eta(R)|$, $\forall n \geq 0$.

inducció cap enrera

Per tant, podem acotar:

$$|\eta(R)| \leq 4^n |\eta(R_n)|, \ \forall n \geq 0.$$

És clar que $\bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = \{z^*\}$ on $z^* \in R$ i, per tant, f $\mathbb{C}$-diferenciable en z^*.

Apliquem la definició de $\mathbb{C}$-diferenciabilitat: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. si $z \in D(z^*;\delta)$ llavors: $\left| \dfrac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \dfrac{\varepsilon}{d \cdot L}$ on:

d = diametre (o diagonal) de $R = R_0$; L = perímetre de $R = R_0$

Per tant: $|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)\cdot(z - z^*)| < \dfrac{\varepsilon}{d \cdot L}|z - z^*|$, $\forall z \in D(z^*;\delta)$

Fixat ε i δ, triem n prou gran t.q. $R_n \subset D(z^*;\delta)$. Anem a acotar el tamany de $|\eta(R_n)|$ per aquest n.

Per acotar $\eta(R_m)$ usem a més que $\int_{\partial R_m^+} f(z^*)\,dz = 0$ i que

$\int_{\partial R_m^+} f'(z^*)\cdot(z-z^*)\,dz = 0$, on usem que ∂R_m^+ corba tancada i $f(z^*)$ i $f(z^*)\cdot(z-z^*)$ tenen primitiva holomorfa. Aleshores:

$$\eta(R_m) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\partial R_m^+} f(z)\,dz = \int_{\partial R_m^+} \left(f(z) - f(z^*) - f'(z^*)\cdot(z-z^*) \right) dz$$

Per tant:

$$|\eta(R_m)| \leq \sup_{z\in\partial R_m^+} \{ |f(z)-f(z^*)-f'(z^*)\cdot(z-z^*)| \} \cdot \operatorname{long}(\partial R_m^+) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{d\cdot L} \sup_{z\in\partial R_m^+} \{|z-z^*|\} (2^{-m} L) \leq \frac{\varepsilon}{d}(2^{-m} d) 2^{-m} = 4^{-m}\cdot\varepsilon,$$

on usem que, com que $z^* \in R_m$ i $z \in \partial R_m^+$:

$\sup\{|z-z^*|\} \leq \text{diametre}(R_m) = 2^{-m}\,\text{diametre}(R) = 2^{-m}\cdot d$, i a més:

$\operatorname{long}(\partial R_m) = 2^{-m} L$

Podem concloure doncs: $|\eta(R)| \leq 4^m |\eta(R_m)| \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$

D'aquí obtenim $|\eta(R)| = 0 \Rightarrow \eta(R) = 0$

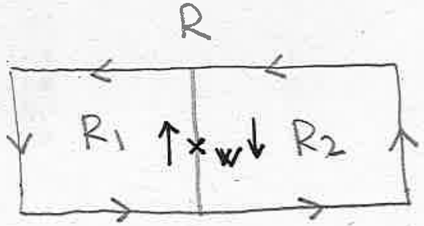
$\boxed{\text{Cas 2}}$ $\boxed{\text{Suposem } w \in \partial R}$ En aquest, considerem una successió creixent de rectangles

$\{R_m\}_{m \geq 1}$ t.q. $\underbrace{R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R_m \subset \cdots \subset R}_{\text{inclusions estrictes.}}$ i $R_m \to R$ quan $m \to +\infty$.

Aleshores, $w \notin R_m$ per cap $m \geq 1$ i pel $\boxed{\text{Cas 1}}$ és té: $\int_{\partial R_m^+} f = 0, \ \forall m \geq 0.$

Ara es tracta de veure que $\int_{\partial R_m^+} f \to \int_{\partial R^+} f$ quan $m \to +\infty$. Per veure-ho, cal escriure ambdues expressions i usar que f contínua en $R \Rightarrow f$ uniformement contínua en R i usar convergència uniforme de les funcions (ometem els detalls!)

$\boxed{\text{Cas 3}}$ $\boxed{\text{Suposem } w \in \mathring{R} \text{ (punt interior)}}$ Descomposem $R = R_1 \cup R_2$ on $w \in \partial R_j$, $j=1,2$, tal com es veu en la figura esquerra. És clar:



$$\int_{\partial R^+} f = \int_{\partial R_1^+} f + \int_{\partial R_2^+} f = 0, \text{ ja que } \int_{\partial R_j^+} f = 0 \text{ usant } \boxed{\text{Cas 2}}$$

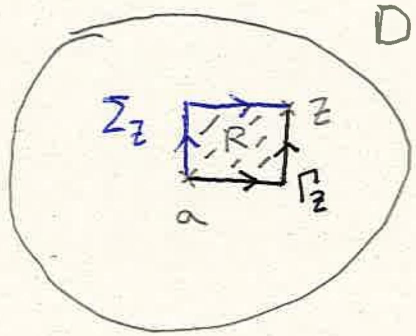
→ Via el teorema de Cauchy-Goursat provarem que tota funció holomorfa en un disc admet primitiva holomorfa en el disc, si bé el resultat l'enunciarem i provarem pel cas en que $f \in C(D) \cap H(D \setminus \{w\})$, ja que aquesta versió ens cal per deduir la fórmula integral de Cauchy.

- **Teorema** (Existència local de primitives)

Sigui $D = D(a;r) \subset \mathbb{C}$, $w \in D$ i $f \in C(D) \cap H(D \setminus \{w\})$. Aleshores: existeix $F \in H(D)$ tal que $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$. A més, F és única mòdul la suma d'una constant complexa. En particular:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0, \quad \forall \Gamma \text{ camí tancat tal que } \Gamma \subset D.$$

- **Demostració:** Definim: $F(z) := \int_{\Gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta$ on Γ_z

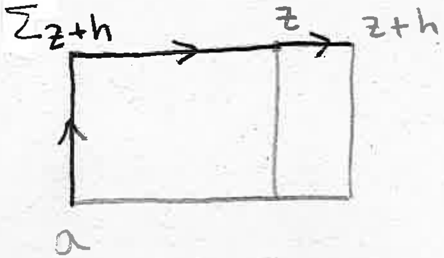


és el camí poligonal de la figura, definit unint a i z per dos costats del rectangle R que té per una de les seves diagonals el segment $[a,z]$. La possible ambigüetat en la definició de $F(z)$ que ve donada pel fet de triar Γ_z o Σ_z no és tal, ja que pel Teorema de Cauchy-Goursat; $R \subset D$ implica:

$$\int_{\partial R^+} f = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_z - \Sigma_z} f = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_z} f - \int_{\Sigma_z} f = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_z} f = \int_{\Sigma_z} f.$$

· L'objectiu és veure que $F \in H(D)$ i $F'(z) = f(z)$. Per fer-ho, calculem separadament $\frac{\partial F}{\partial x}(z)$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(z)$, on $z \in D$ és fixat, i xequejem que verifiquen les condicions de Cauchy-Riemann i que $F'(z) = f(z)$

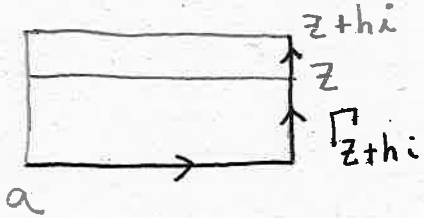
· $$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{\Sigma_{z+h}} f - \int_{\Sigma_z} f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f =$$



$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\int_0^h f(z+t)\,dt}{h} = \frac{0}{0} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} f(z+h) = f(z)$$

$z(t) = z + t,\ t \in [0,h],\ z'(t) = 1$ L'Hôpital

· $$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{F(z+hi) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{\Gamma_{z+hi}} f - \int_{\Gamma_z} f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[z, z+hi]} f =$$



$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} \frac{i \int_0^h f(z+t \cdot i)\,dt}{h} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h \to 0} i f(z+hi) = i f(z)$$

$z(t) = z + t \cdot i,\ t \in [0,h],\ z'(t) = i$ L'Hôpital

Per tant, F verifica les condicions de Cauchy-Riemann en z: $i \frac{\partial F}{\partial x}(z) = \frac{\partial F}{\partial y}(z)$. Com que les funcions derivades parcials són contínues es té a més que F és $\mathbb{C}$-dif. en z i que $F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z)$. La unicitat de la primitiva és òbvia, ja que la resta de dues primitives té derivada holomorfa zero en D (connex) i per tant és const.

- Coro$\ell^{\cdot}$lari: $f \in H(D) \Rightarrow f$ admet una primitiva holomorfa en D i, per tant, $\int_\Gamma f = 0$, $\forall \Gamma \subset D$ camí tancat.

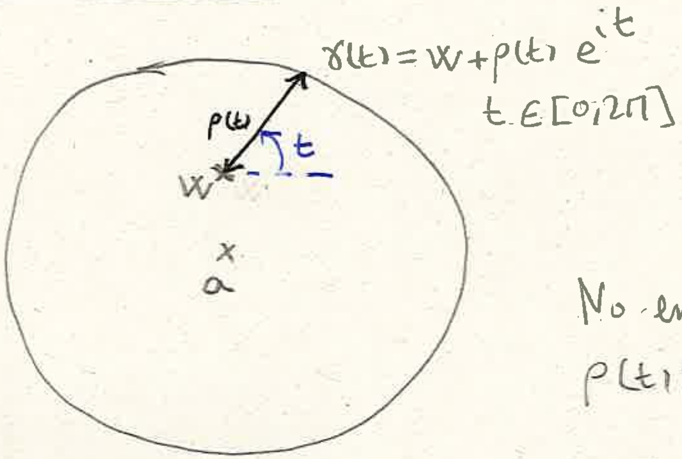
- Comentari 1: No és possible globalitzar aquests resultats a dominis oberts NO simplement connexs. Per exemple, $f(z) = 1/z$ és holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, que no és simpl. connex, i no admet extensió ~~contínua~~ holomorfa a $z=0$. Si $f(z) = 1/z$ admetés una primitiva holomorfa en Ω, aleshores $F(z) = \log(z)$ per alguna branca del logaritme. Però no existeix cap branca del logaritme holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Comentari 2: Observeu que en la prova del Teorema d'existència local de Primitiva el que realment hem usat és $f \in C(D)$ & $\int_{\partial R^*} f = 0$, $\forall R \subset D$ rectangle.

- Tot seguit usarem aquest teorema per obtenir una fórmula de representació de les funcions holomorfes en l'interior d'un disc a partir d'una integral de línea sobre la frontera del disc que, per tant, només involucra els valors de f en ∂D.

- **Lema:** $D = D(a;r)$ i $w \in D$. Aleshores $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{dz}{z-w} = 1$.

- **Demostració:**



$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = w + \rho(t)\, e^{it}$$

γ dóna una parametrització C^1 de ∂D^+, on el paràmetre t és el de la figura.

No ens cal cap fórmula per $\rho(t)$ i només saber que $\rho(t) > 0$ és C^1 i que $\rho(0) = \rho(2\pi)$. Aleshores:

$$\int_{\partial D^+} \frac{dz}{z-w} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(t) e^{it}} \underbrace{\left(\rho'(t) e^{it} + \rho(t)\, i\, e^{it}\right)}_{\gamma'(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\, dt + i\int_0^{2\pi} dt = \underbrace{\Big[\ln(\rho(t))\Big]_{t=0}^{t=2\pi}}_{=0} + 2\pi i = 2\pi i$$

- **Teorema** (Fórmula de Cauchy en el disc)

Sigui $D \subset \mathbb{C}$ un disc obert i $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$. Aleshores, $\forall\, w \in D$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

- <u>Demostració</u> (fórmula de Cauchy en un disc)

Definim:
$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w \\ f'(w), & z = w \end{cases}$$
Recordem: $w \in D = (a;R)$ fixat.

(1) $g \in H(D \setminus \{w\})$ per definició de g.

(2) $\lim_{z \to w} g(z) = f'(w)$ en quant f $\mathbb{C}$-diferenciable en $z = w$.

Per tant, $g \in C(\overline{D}) \cap H(D \setminus \{w\})$. En conseqüència, podem aplicar el Teorema d'existència local de primitives a g:

$$\exists\, G \in H(D) \text{ t.q. } G'(z) = g(z),\ \forall z \in D$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{\Gamma_r} g(z)\, dz = 0, \text{ on } \Gamma_r = \partial D(a;r)^+ \text{ i } |w| < r < R \ (\text{Per tant, } \underbrace{w \in D(a;r)}_{\text{pel lema anterior } 2\pi i})$$

Així:
$$0 = \int_{\Gamma_r} g = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\, dz \Rightarrow \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = f(w) \overbrace{\int_{\partial D(a;r)^+} \frac{dz}{z-w}}^{2\pi i} = 2\pi i\, f(w)$$

Ara toca fer $r \to R^-$ i usar que $f \in C(\overline{D})$ [argument de continuïtat uniforme]:
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \lim_{r \to R^-} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \lim_{r \to R^-} f(w) = f(w).$$ (detalls a continuació!)

- Demostració fórmula de Cauchy en un disc (addendum)

Anem a fer els detalls de la darrera part de la prova de la fórmula. Concretament, anem a veure que si $f \in C(\bar{D}(a;R))$ (només usem continuïtat de f), aleshores:

$$\lim_{r \to R^-} \int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_{\partial D(a,R)^+} \frac{f(z)}{z-w}\, dz$$

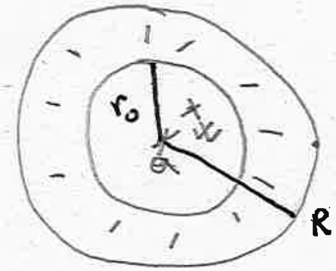
on, com $|w-a|<R$, podem suposar $w \in D(a;r)$, per a tots els $r<R$ que considerem en fer el límit (això és, $|w-a|<r<R$).

És tracta d'un límit de variable contínua, però ja sabem que si el límit és cert per a tota successió de valors de r, això és $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ amb $|w-a|<r_n<R$ i $\lim_{n \to +\infty} r_n = R$, aleshores també és cert el límit per variable contínua. Considerem doncs una successió d'aquesta manera. Aleshores:

$$\int_{\partial D(a;r_n)^+} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+r_n e^{it})}{a+r_n e^{it}-w} \underbrace{r_n i e^{it}}_{\gamma_n'(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} g(a+r_n e^{it})\, dt,$$ on hem

parametritzat $\partial D(a;r_n)^+$ per $\gamma_n(t) = a + r_n e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, i hem definit

$g(z) = \dfrac{f(z)}{z-w}(z-a)i \in C(\bar{K})$, on $\bar{K} = \bar{D}(a;R) \setminus D(a;r_0)$ és un compacte definit per una corona de centre "a", radi interior r_0 i radi exterior R, on $|w-a|<r_0<R$ per tal que $w \notin \bar{K}$. Podem suposar $r_0 < r_n < R$, $\forall n$.



Usant la notació anterior, volem veure que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} g(a+r_n e^{it})\,dt = \int_0^{2\pi} g(a+Re^{it})\,dt,$$

on $g \in C(K)$, K compacte, $a+r_n e^{it} \in K$ i $a+Re^{it} \in K$, $\forall n \geq 1$, $r_n < R$, $r_n \to R$ quan $n \to +\infty$. És clar que si fixem $t \in [0,2\pi]$, aleshores $g(a+r_n e^{it}) \to g(a+Re^{it})$ (puntualment) quan $n \to +\infty$, però si volem entrar el límit dins de la integral ens cal convergència uniforme. Aleshores, $g \in C(K)$ implica que g és uniformement contínua en K: $\forall \varepsilon > 0, \exists \underbrace{\delta(\varepsilon)}_{\text{no depèn de } z \in K} > 0$ t.q. si $z_1, z_2 \in K$ amb $|z_1 - z_2| \leq \delta(\varepsilon)$, llavors $|g(z_1) - g(z_2)| \leq \varepsilon$. Aleshores, donat $\varepsilon > 0$, considerem aquest valor $\delta(\varepsilon)$ donat per la continuïtat uniforme de g, i triem $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|r_n - R| \leq \delta(\varepsilon)$, $\forall n \geq \underbrace{n_0(\varepsilon)}_{\text{no depèn de } t \in [0,2\pi]}$.

Llavors tenim que si tem $z_1 = a + r_n e^{it}$ i $z_2 = a + Re^{it}$, es té

$$|z_1 - z_2| = |(a+r_n e^{it}) - (a+Re^{it})| = |r_n - R||e^{it}| = |r_n - R| \leq \delta(\varepsilon), \ \forall t \in [0,2\pi]$$

Per tant, si $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |g(a+r_n e^{it}) - g(a+Re^{it})| \leq \varepsilon$, $\forall t \in [0,2\pi]$ i $g(a+r_n e^{it})$ convergeix uniformement a $g(a+Re^{it})$, $\forall t \in [0,2\pi]$

- Comentari: Observeu que si $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, i $\overline{D} \subset \Omega$ on D és un disc, aleshores és automàtic que $f \in C(\overline{D})$.

- Teorema (de representació local en sèrie de potències)

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega)$. Siguin $a \in \Omega$ i $r > 0$ tals que $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$. Aleshores, la funció f admet una representació en sèrie de potències convergent en $D(a;r)$, de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n, \quad \forall z \in D(a;r)$$

En particular, $f \in C^{\infty}(\Omega)$ (com a funció de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) i infinits cops $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω, de forma que $f^{(n)} \in H(\Omega)$, $\forall n \geq 0$. A més:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \forall n \geq 0 \iff f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

- Demostració:

La fórmula de Cauchy en el disc ens diu que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in D(a;r) \iff \forall z \text{ t.q. } |z-a| < r.$$

Ens fixem ara en l'expressió $\frac{1}{w-z}$ i la relacionem amb $w-a$.

Concretament, si $w \in \partial D(a;r)$ i $z \in D(a;r)$:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)\cdot\left(\frac{w-z}{w-a}\right)} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \qquad (1)$$

on usem que, fixant $z \in D(a;r)$ i denotant per $r_0 = |z-a| < r$, aleshores $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{r_0}{r} < 1$. Per tant, $\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}$ és la suma de la progressió geomètrica de raó (complexa) $\frac{z-a}{w-a}$ de mòdul r_0/r menor que 1. A més, (1) és uniformement convergent com a funció de $w \in \partial D(a;r)$ [Criteri M de Weierstrass]

Així, $\forall z \in D(a;r)$ fixat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r)^+}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r)^+} f(w)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}}_{\substack{\text{convergeix unif.}\\ \text{per } w\in\partial D(a;r)^+}}\,dw \underset{\substack{\text{permutem}\\ \text{sèrie i integral}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r)^+}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)}_{\overset{\text{def.}}{=} c_n}(z-a)^n$$

Per tant, el valor de $f(z)$, $\forall z \in D(a;r)$, s'obté com a suma de la sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, pels $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ obtinguts. Aleshores, el fet de que $f \in C^{\infty}(D(a;r))$ f infinits cops $\mathbb{C}$-diferenciable en $D(a;r)$ i $f^{(n)} \in H(D(a;r))$, $\forall n \geq 0$, són propietats conegudes de les sèries de potències. En ésser Ω obert i $D(a;r) \subset \Omega$ disc arbitrari, aquestes propietats són vàlides en tot Ω.

- Corol·lari (fórmula de Cauchy en un disc per les derivades)

$D \subset \mathbb{C}$ disc obert i $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$. Aleshores, $\forall w \in D$:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, dz.$$

- Demostració: La fórmula de Cauchy ens diu que $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z-w} \, dz$.

Ara que hem vist que f és infinits cops $\mathbb{C}$-diferenciable en D, podem calcular les seves derivades via derivació sota el signe integral:

$$f^{(n)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d^n}{dw^n} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z-w} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} f(z) \frac{d^n}{dw^n} \left(\frac{1}{z-w} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} f(z) \frac{n!}{(z-w)^{n+1}} \, dz.$$

- Comentari 1: De fet és un nou corol·lari del teorema anterior. Si $f \in H(\Omega)$ i $a \in \Omega$, hem vist que la sèrie de potències de f en "a" ("sèrie de Taylor") donada per $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (z-a)^n$, és convergent en el disc $D(a;r)$, per tot r tal que $\bar{D}(a;r) \subset \Omega$. Això vol dir que, si considerem la distància de "a" a la vora del domini Ω, $d = \text{dist}(a, \partial\Omega) \in (0, +\infty)$, aleshores el radi de convergència d'aquesta sèrie de potències és $\geq d$.

A efectes pràctics tindrem el següent: si $d_0 \geq d$ és la distància de "a" al punt de $\mathbb{C}$ més proper pel qual f no admet "prolongació analítica" (singularitat) aleshores el radi de convergència és <u>exactament</u> igual a d_0.

- Comentari 2: De fet, en bona part ja l'hem esmentat, però ho adaptem de nou al context actual. Suposem $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $a \in \Omega$ i denotem per r el radi de convergència de la sèrie de potències de f en $z=a$, $r \in (0, +\infty]$.

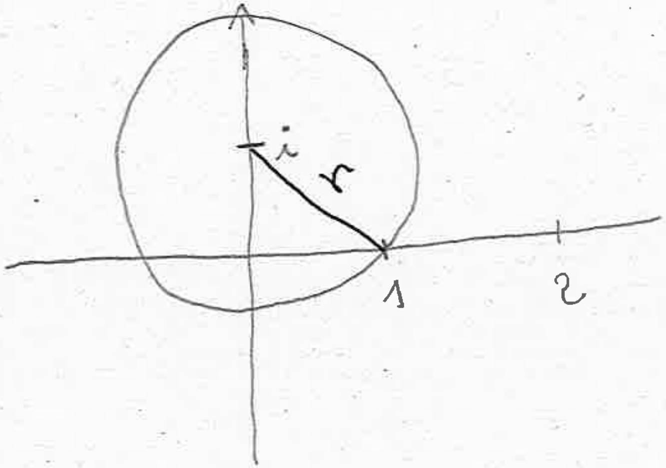
(1) Si és el cas que $D(a;r)$ no està enterament contingut en Ω, de segur que f admet prolongació holomorfa a $\Omega \cup D(a;r)$. (Ho discutim d'aquí poc!)

(2) Si $r < +\infty$, és segur que f no admet prolongació analítica en almenys un punt de la vora $\partial D(a;r)$, i pot ser que en cap (P. ex. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$).

(3) Si la sèrie de potències en $z=a$ convergeix en algun punt de la vora del disc de convergència, això no vol dir, necessàriament, que f admeti prolongació holomorfa en aquest punt. Tampoc el fet de que la sèrie divergeixi en algun punt de la vora vol dir que no admeti prolongació holomorfa en el punt de la vora. El que sí és cert és el següent:

(4) Això és conseqüència del Teorema de Abel (que no hem provat però que teniu a les notes del Joaquim Ortega): Si f admet prolongació holomorfa a un punt de la vora del disc de convergència $\partial D(a;r)$ i a més a més (calen les 2 coses!) la sèrie de potències és convergent en aquest punt, aleshores la suma de la sèrie i el valor de la funció donen el mateix.

- **Exemple:** $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} \in H(\mathbb{C} \setminus \{1,2\})$



Quin és el radi de convergència r de la sèrie de potències de f entorn $z=i$?

Hem de calcular la distància de $z=i$ als dos únics punts de $\mathbb{C}$ on f no admet prolongació holomorfa, que són $z=1$ i $z=2$. Clarament el més proper és $z=1$. Per tant, el valor de r és:

$$r = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

A més, és clar que la sèrie de potències de f en $z=i$ no convergeix en $z=1$. Si és el cas (caldria veure-ho!) que aquesta sèrie convergeix per algun $z \in \partial D(i,\sqrt{2})$, aleshores el valor de la suma de la sèrie sí és el valor $f(z)$.

- Proposició: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in C(\Omega)$. Aleshores, són equivalents:

1) $f \in H(\Omega)$
2) $f \in H(\Omega \setminus \{w\})$
3) f admet representació com a sèrie de potències convergent en tot disc obert D tal que $\overline{D} \subset \Omega$.
4) f admet primitiva holomorfa $F \in H(D)$ en tot disc obert $D \subset \Omega$.
5) $f \in C^1(\Omega)$ i f satisfà les condicions de Cauchy-Riemann en Ω.
6) Per a tot rectangle tancat $R = [a,b] \times [c,d] \subset \Omega$ se satisfà $\int_{\partial R^+} f = 0$.
7) Per a tot triangle tancat $\Delta \subset \Omega$ se satisfà $\int_{\partial \Delta^+} f = 0$ (Teorema de Morera).
8) $f \in C^1(\Omega)$ i l'aplicació diferencial $df(a)(\cdot): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $\mathbb{C}$-lineal, $\forall a \in \Omega$.
9) $f \in C^1(\Omega)$ i f és una aplicació conforme (preserva angles i orientació), tret d'aquells punts $z_0 \in \Omega$ on $f'(z_0) = 0$.
10) Per a tot disc obert D tal que $\overline{D} \subset \Omega$ tenim $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$, $\forall z \in D$.

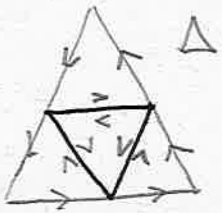
- Teorema (de Morera)

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f: \Omega \to \mathbb{C}$ contínua. Aleshores:

$$f \in H(\Omega) \iff \forall \Delta \subset \Omega \text{ triangle tancat és té } \int_{\partial\Delta^+} f(z)\,dz = 0.$$

- Demostració:

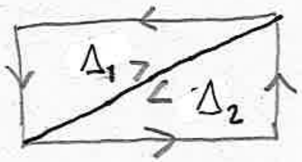
[$\Rightarrow$] Suposem $f \in H(\Omega)$ i sigui $\Delta \subset \Omega$ triangle tancat



Δ

Podem veure que $\int_{\partial\Delta^+} f = 0$ descomposant la integral com a suma d'integrals sobre costats de triangles més petits, anàlogament al que hem fet pel cas dels rectangles. En la figura veiem com descomposar Δ com unió de 4 triangles més petits, $\Delta = \bigcup_{j=1}^{4} \Delta_j$, de forma que $\int_{\partial\Delta^+} f = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j^+} f$ (observem com es cancel·len les integrals dels costats interiors). Repetint aquesta descomposició tants cops com calgui, podem aconseguir que cada sub-triangle sigui prou petit per estar contingut dins d'un disc obert contingut en Ω. Per l'existència local de primitives en un disc, la integral sobre la (corba tancada) definida per la vora de cada sub-triangle és zero.

[$\Leftarrow$] Si $f \in C(\Omega)$ i $\int_{\partial\Delta^+} f = 0$ per tot $\Delta \subset \Omega$ triangle tancat $\Rightarrow \int_{\partial R^+} f = 0$, per tot $R = [a,b] \times [c,d] \subset R$. En efecte: $\int_{\partial R^+} f = \int_{\partial\Delta_1^+} f + \int_{\partial\Delta_2^+} f = 0$, tal com es veu en la figura:



R

Aleshores, $f \in C(\Omega)$ & $\int_{\partial R^+} f = 0$, $\forall R = [a,b] \times [c,d] \subset \Omega$ és tot el que ens cal per construir per cada disc obert $D \subset \Omega$ una primitiva holomorfa de f, t.q. $F' = f$ en $D \Rightarrow f$ holomorfa en quant derivada de F holomorfa.

- **Teorema** (Principi de continuació o prolongació analítica)

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini (obert & connex) i $f \in H(\Omega)$. Si $U \subset \Omega$ és un obert, $U \neq \phi$, i $f|_U \equiv 0$, aleshores $f \equiv 0$ en tot Ω.

- **Demostració:**

(1) Recordem: Si $E \subset \Omega$ verifica que E és simultàniament obert i tancat, aleshores o bé $E = \Omega$ o bé $E = \phi$. Altrament, $\Omega = E \cup (\Omega \setminus E)$ expressa Ω com unió disjunta de dos oberts no buits.

(2) Definim: $E_n = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$, $\forall n \geq 0$.

$f \in H(\Omega) \Rightarrow f^{(n)} \in C(\Omega)$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow E_n = (f^{(n)})^{-1}\{0\}$ és un conjunt tancat (En quant anti-imatge per una aplicació contínua d'un tancat: $\{0\}$).

(3) $E = \bigcap_{n \geq 0} E_n$ és un conjunt tancat (en quant intersecció d'un nombre arbitrari de conjunts tancats). A més, $U \subset E \Rightarrow E \neq \phi$. Si veiem que E és obert $\overset{(1)}{\Rightarrow} E = \Omega$.

(4) Sigui $a \in \Omega$, punt qualsevol, i $r > 0$ t.q. $D(a;r) \subset \Omega$. Aleshores, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ ens dóna f en forma d'una sèrie de potències convergent $\forall z \in D(a;r)$ (en quant $f \in H(\Omega)$).

(5) Si $a \in E \Rightarrow f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \geq 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} f(z) = 0$, $\forall z \in D(a;r)$ via la seva sèrie de potències en $a \Rightarrow D(a;r) \subset E \Rightarrow E$ és obert $\Rightarrow E = \Omega$ per (3)

- <u>Def.</u>: Sigui $E \subset \mathbb{C}$ un subconjunt (arbitrari) fixat.

(I) $E' = \{$punts d'acumulació de $E\} = \left\{ a \in \mathbb{C} \mid \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ t.q. } \begin{array}{l} z_n \in E \setminus \{a\} \\ \lim_{n\to\infty} z_n = a \end{array} \right\}$

(II) $E \setminus E' = \{$punts aïllats de $E\} = \{ a \in E \mid \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a,r) \cap E = \{a\} \}$

(III) Direm que E és un conjunt discret sii $E' = \phi$ sii tots els punts de E són aïllats. No és difícil veure que, aleshores, E és un conjunt finit o numerable de $\mathbb{C}$.

- <u>Teorema</u>: Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini i $f \in H(\Omega)$ tal que $f \not\equiv 0$. Sigui $E = \{ z \in \Omega \mid f(z) = 0 \}$ (zeros de f). Aleshores, E és un conjunt discret (tots els seus punts són punts aïllats de Ω). En particular, E és un conjunt finit o numerable. A més, $\forall a \in E$, existeix un únic $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tal que $f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$, on $g \in H(\Omega)$ i $g(a) \neq 0$

(m és l'ordre del zero $z=a$ de f)

- Demostració (distribució dels zeros d'una funció holomorfa).

Sigui $a \in E \Leftrightarrow f(a)=0$. Sabem que $\exists r>0$ tal que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $\forall z \in D(a;r) \subset \Omega$.

És clar que $c_0 = f(a) = 0$. Sigui $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ i $c_m \neq 0$.

(En el cas que $c_n = 0$, $\forall n \geq 0$, aleshores $f(z)=0$, $\forall z \in D(a;r)$ i pel principi de continuació analítica és té $f(z)=0$ en Ω contradint l'enunciat). Aleshores:

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} = (z-a)^m \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z-a)^n}_{\overset{\text{def.}}{=} g(z)}, \quad \forall z \in D(a;r)$$

Per $g(z)$ és fàcil veure que el seu radi convergència és el mateix que el de $g(z)$ i que $g(a) = c_m \neq 0$. Per tant podem garantir que $g \in H(D(a;r))$ i que, com a conseqüència de la continuïtat de g en $D(a;r)$, és té $g(z) \neq 0$ per tot z en un entorn de a. Així doncs, $f(a)=0$ i $f(z) = (z-a)^m g(z) \neq 0$ si $z \neq 0$ és en un entorn de a. Per tant, a és un punt aïllat de $E = \{\text{zeros de } f\}$.

Finalment, podem extendre la definició de $g(z)$ en $\Omega \setminus \{a\}$ fent $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}$. Clarament, aquesta definició ens diu que $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Però com ja sabem que també ho és en $D(a;r)$ podem concloure que $g \in H(\Omega)$ com volíem veure.

- Tot conjunt $E \subset \mathbb{R}^n$ discret és finit o numerable (addendum)

Suposem E infinit no numerable i obtindrem una contradicció. Per fer-ho, usem que si $\{s_j\}_{j\in J}$ és una col·lecció de nombres reals, $s_j > 0$ $\forall j$, amb J conjunt d'índexs infinit no numerable, llavors $\sum_{j\in J} s_j = +\infty$ (entenent la suma com el suprem de les sumes finites).

En efecte, $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, on $J_n = \{ j \in J : s_j \geq 1/n \}$. Així, J és unió numerable de conjunts. Si tot J_n és finit o numerable, llavors J també. Per tant, J_{n_0} ha de ser infinit no numerable per algun $n_0 > 0$ i existeix doncs una quantitat infinita no numerable de s_j t.q. $s_j \geq 1/n_0 \Rightarrow \sum_{j\in J} s_j = +\infty$. Per E usem un argument semblant. Escrivim $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ on $E_n = E \cap B(\vec{0}; n)$ i, clarament, $J = E_{n_0}$ ha de ser infinit no numerable per algun n_0. Llavors, com $J \subset B(\vec{0}; n)$ és discret, existeix una col·lecció de radis $\{r_j\}_{j\in J}$, $r_j > 0$ $\forall j$, t.q. $B(j; r_j) \subset B(\vec{0}; n)$ per tot j i $B(j; r_j) \cap B(j'; r_{j'}) = \emptyset$, si $j \neq j'$. Així, $\text{Volum}(B(\vec{0}; n)) \geq \bigcup_{j\in J} \text{Volum}(B(j; r_j))$ d'on $\underbrace{\sum_{j\in J} \pi r_j^2}_{\text{suma infinita no numerable de nombres positius}} \leq \pi n^2$, fet que acabem de veure que no pot ser.

Per tant, E ha de ser finit o numerable.

- Corol·lari: $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini i $f, g \in H(\Omega)$. Considerem el conjunt $E = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$. Si E té algun punt d'acumulació dins Ω, llavors $f \equiv g$ en Ω.

- Demostració: Fem $F(z) = f(z) - g(z)$. Llavors $E = \{z \in \Omega \mid F(z) = 0\}$ on $F \in H(\Omega)$. Pel teorema anterior de distribució dels zeros d'una funció holomorfa sabem que si $F \not\equiv 0$ en Ω aleshores tots els elements de E són punts aïllats. Per tant, si E té un punt d'acumulació ha de ser $F \equiv 0$ en $\Omega \Leftrightarrow f(z) = g(z), \forall z \in \Omega$.

- Comentaris sobre la prolongació analítica de les funcions holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini i $f \in H(\Omega)$. Com a punt de partida per les discussions següents, podem pensar que Ω és l'obert "més gran" de $\mathbb{C}$ en el qual és possible prolongar els valors de f de forma que la funció resultant sigui holomorfa en Ω. Però, com comentarem, aquesta idea d'obert "més gran" de $\mathbb{C}$ no està ben definida per les funcions holomorfes multi-valuades com l'arrel quadrada (que admet dues multi-valuacions) o el logaritme (que té infinites multi-valuacions). Per aquestes funcions, el seu domini natural de definició és més complicat i transcendeix el pla complex. En 1er lloc però, anem a discutir algunes propietats que determinen completament els valors de f en tot Ω a partir d'informació local de f.

- Així, si disposem d'alguna de les informacions següents sobre f:

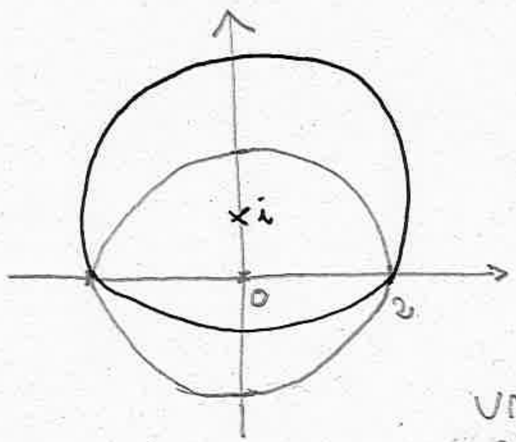
(I) Coneixem $f(z)$, $\forall z \in U$, on $U \subset \Omega$ és un obert (p.ex. un disc).

(II) Coneixem la sèrie de potències de f per algun punt $a \in \Omega$ (o, equivalentment, els valors de $f^{(n)}(a)$, $\forall n \geq 0$).

(III) Coneixem els valors de $f(z)$, $\forall z \in E$, on $E \subset \Omega$ és un conjunt numerable tal que té almenys un punt d'acumulació $a \in \Omega$.

En tots aquests casos, els valors de f en tot Ω queden completament determinats.

La forma pràctica de generar aquesta prolongació analítica de f "fins allà on és pugui" és la d'anar enganxant discs de convergència de la sèrie de potències de f en punts diferents, que recobreixin Ω, i que en els punts continguts en la intersecció de dos d'aquests discs els valors corresponents a la suma de les dues sèries de potències siguin els mateixos.



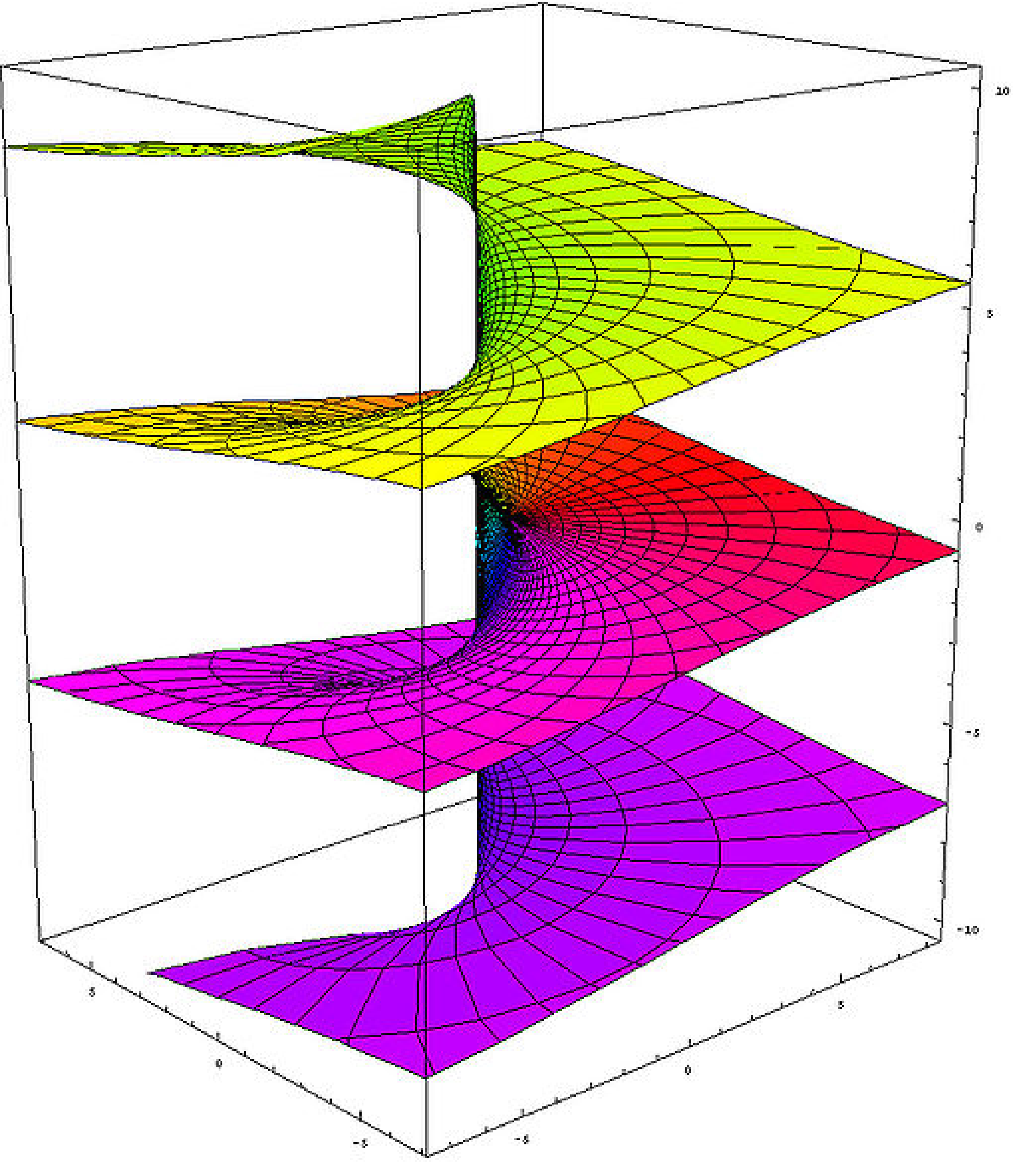
Considerem, p. ex., $f(z) = \frac{1}{z-2} \in H(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2\}$, que és l'obert "més gran" en el que podem prolongar f de forma holomorfa. Ara suposem coneguda, no pas la fórmula per f, sinó la seva sèrie de potències en $z=0$.

Aquesta sèrie convergeix en $D(0;2)$ i allà hi defineix una funció holomorfa. Per tant, podem usar-la per calcular, p.ex., $f^{(n)}(i)$, $\forall n \geq 0$, ja que $i \in D(0;2)$.

Ara que coneixem $f^{(n)}(i)$, $\forall n \geq 0$, podem considerar la sèrie de potències de f en $z=i$, que convergeix en $D(i;\sqrt{5})$, on $\sqrt{5} = |2-i|$. En els punts $z \in D(0;2) \cap D(i;\sqrt{5})$, la funció definida per la suma de qualsevol de les dues sèries de potències, entorn "0" ó entorn "i", és la mateixa (donada per $f(z) = \frac{1}{z-2}$). Per tant, ara ja hauríem prolongat f de $D(0;2)$ a $D(0;2) \cup D(i;\sqrt{5})$ i podríem continuar la prolongació fins definir f en $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. I en aquest cas no trobaríem cap problema per fer-ho, ja que la funció $f(z)$ considerada no té cap problema de multi-valuació.

Però, què succeeix si discutim la prolongació analítica d'una funció multi-valuada, com p. ex. $f(z) = \log(z)$. Prenem com a punt de partida, p.ex., la semi-recta $(0,+\infty) \subset \mathbb{C}$ on triem la determinació $\log(z) = \ln(z)$ (logaritme neperià real). Si ara prolonguem aquesta determinació del logaritme en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, per una banda incrementant $\arg(z)$ de "0" a "π" i de l'altra banda decrementem l'argument de "0" a "$-\pi$", llavors quan arribem a la semi-recta $(-\infty,0) \subset \mathbb{C}$ cadascuna d'aquestes dues prolongacions donarà lloc a un valor diferent de $\log(z)$ quan $z \in (-\infty,0)$. Anant per dalt obtindrem $\log(z) = \ln|z| + i\pi$, i anant per baix $\log(z) = \ln|z| - i\pi$.

L'única forma d'evitar que aquesta col·lisió de dues definicions diferents del $\log(z)$ quan $z \in (-\infty, 0)$ trenquin, no ja el caràcter holomorf de $\log(z)$, sinó ja només el seu caràcter continu, és que els punts $z \in (-\infty, 0)$ quan s'assoleixin amb l'argument creixent de "0" a "π" i els punts $z \in (-\infty, 0)$ quan s'assoleixin amb l'argument decreixent de "0" a "$-\pi$" no siguin els mateixos sinó que estiguin "a nivell diferent". Això ho podem visualitzar així: retallem $\mathbb{C}$ com si fos un full de paper seguint la línea marcada per la semi-recta $(-\infty, 0]$. Aleshores, posem a nivell diferent els dos costats del full de paper al voltant del tall. El resultat es veu com una rampa de pujada a un parking que gira entorn d'una columna obtinguda elevant verticalment l'origen del pla complex. Aquesta rampa la podem prolongar infinitament cap a dalt i cap a baix tot espiralant entorn d'aquesta columna vertical que surt de l'origen. La superfície resultant s'anomena la superfície de Riemann de la funció logaritme. El que fa aquesta superfície és posar cadascuna de les possibles infinites multi-valuacions de la funció logaritme en un nivell diferent. A cada nivell se l'anomena un full de la superfície de Riemann.


10
5
0
-5
-10
5
0
-5
5
0
-5

- Comentari: Si, p. ex., $f \in C^1([a,b])$ i tenim controlat el tamany de $|f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$, aquesta informació no ens dóna cap informació a priori sobre el tamany de $|f'(x)|$. Per les funcions holomorfes aquest control del tamany de f' en termes del tamany de f sí que és possible.

- Teorema (desigualtats de Cauchy)

Sigui $f \in H(D(a,R))$ i definim $M(r) := \sup_{z \in \partial D(a,r)} \{|f(z)|\}$, $\forall 0<r<R$. Aleshores:

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \cdot M(r) \cdot r^{-n}, \quad \forall n \geq 0 \text{ i } \forall 0<r<R.$$

- Demostració: Com a conseqüència de les fórmules que ens donen els coeficients $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ de la sèrie de potències de $f(z)$ en $z=a$, hem vist que:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \ \forall n \geq 0, \text{ on } D_r = D(a,r), \text{ i } 0<r<R.$$

Acotant el tamany de la integral com el suprem del mòdul de la funció sobre la vora del disc per la longitud del disc, es té:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{z \in \partial D_r} \left\{ \left| \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \right| \right\} \cdot \operatorname{long}(\partial D_r) \underset{z \in \partial D_r \Leftrightarrow |z-a|=r}{\leq} \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \sup_{z \in \partial D_r} \{|f(z)|\} \cdot 2\pi r$$

Per tant: $$|f^{(n)}(a)| \leq n! \frac{M(r)}{r^n} = n! M(r) \cdot r^{-n}.$$

- Corol·lari 1 (teorema de Liouville)

$f \in H(\mathbb{C})$ (entera) i acotada en tot $\mathbb{C} \Rightarrow f$ és constant en tot $\mathbb{C}$.

- Demostració: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, sèrie de potències de $f(z)$ en $z=0$, que és convergent $\forall z \in \mathbb{C}$. A més, sabem que $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Les desigualtats de Cauchy ens diuen que $|f^{(n)}(0)| \leq n!\, M(r)\, r^{-n}$, $\forall n \geq 0$, $\forall r > 0$, on $M(r) = \sup_{z \in \partial D(0;r)} |f(z)|$.

Si suposem $|f(z)| \leq M$ acotada, $\forall z \in \mathbb{C}$, aleshores: $|f^{(n)}(0)| \leq n!\, M r^{-n}$, $\forall n \geq 0$. Així:

$$|c_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq M r^{-n} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \Rightarrow c_n = 0,\ \forall n \geq 1 \Rightarrow f(z) = c_0,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

$\boxed{\text{Si } n \geq 1}$

- Corol·lari 2 (Teorema fonamental de l'àlgebra)

Sigui $p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, un polinomi de grau $n \geq 1$, amb $c_j \in \mathbb{C}$, $\forall j = 0, 1, \dots, n$, i $c_n \neq 0$. Aleshores, existeix $a \in \mathbb{C}$ tal que $p(a) = 0$ (zero de $p(z)$).

Factoritzant $p(z)$ com $q(z) = \frac{p(z)}{z-a}$, i iterant el mateix resultat, veiem que $p(z)$ té n arrels en $\mathbb{C}$ (comptades amb la seva multiplicitat) i que $p(z)$ factoritza com a producte de n monomis: $p(z) = c_n (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$.

- **Demostració** (Teorema fonamental de l'àlgebra)

Suposem que $p(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g(z) = \frac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C})$. A més:

$$|g(z)| = \frac{1}{|z|^m \underbrace{\left| \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{z} + c_m \right|}_{\downarrow |z| \to +\infty \quad c_m}} \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} \frac{1}{+\infty \cdot |c_m|} = 0. \text{ Per tant, p. ex., } \exists R_0 > 0 \text{ t.q.}$$

$|g(z)| \leq 1$ si $|z| \geq R_0$ i podem acotar $|g(z)| \leq M := \text{màx}\left\{1, \sup_{z \in \overline{D}(0;R_0)} |g(z)|\right\}$, on

$\sup_{z \in \overline{D}(0;R_0)} |g(z)|$ és finit ja que g contínua i $\overline{D}(0;R_0)$ compacte. Per tant, g entera i acotada $\underset{\boxed{\text{T.ª Liouville}}}{\Longrightarrow}$ g constant. Però això no pot ser ja que $p(z)$ polinomi de grau ≥ 1.

Per tant, $p(z)$ ha de tenir almenys un zero en $\mathbb{C}$.

- **Corol·lari 3** (funcions enteres d'ordre de creixement polinomial)

$f \in H(\mathbb{C})$ tal que $\exists r, M, \lambda$ nombres reals positius tals que:

$|f(z)| \leq M|z|^\lambda$, $\forall z \in \mathbb{C}$ amb $|z| > r$. Aleshores, $f(z)$ és un polinomi de grau $\leq \lambda$.

- **Demostració**: Exercici (per fer a classe de problemes)

- **Comentari**: Via les desigualtats de Cauchy podem controlar el tamany de les derivades d'una funció holomorfa en un disc a partir del tamany de la funció en la vora del disc. Però també podem controlar el tamany de la funció en un obert a partir del tamany de la funció en la vora de l'obert. Ens cal un resultat auxiliar:

- **Lema** (Propietat del valor mitjà)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$ i $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$. Aleshores:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+r\cdot e^{i\theta})\, d\theta$$

(El valor de f en el centre del disc és el promig dels valors de f en la vora del disc.)

- **Demostració**: Per la fórmula de Cauchy en el disc sabem:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a;r)^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}\cdot \underbrace{rie^{it}}_{=\gamma'(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma(t) = a+re^{it},\ t\in[0,2\pi]\\ \gamma'(t) = ire^{it}\end{array}\right\}\ \text{Parametrització de } \partial D(a;r)$$

- <u>Teorema</u> (Principi del màxim fort)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domini, $f \in H(\Omega)$. Si existeix $a \in \Omega$ tal que:

$|f(a)| = \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$. Aleshores, f és constant.

(i.e., si el màxim de $|f(z)|$ està en l'interior de Ω, llavors $f \equiv$ const.).

- <u>Demostració</u>: Sigui $r > 0$ tal que $\overline{D}(a; r) \subset \Omega$ i apliquem la propietat del valor mitjà del lema anterior a aquest disc:

$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$. Prenent mòdul a la igualtat i entrant-lo dins de la integral: $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt \leq \sup_\Omega |f| = |f(a)|$

Com la cadena de desigualtats acaba igual que comença tot han de ser "$=$":

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\,dt = \sup_\Omega |f| = |f(a)|$

Aleshores, ara usem el següent resultat elemental (que deixem com exercici):

$g : [0, 2\pi] \to [0, +\infty)$ contínua t.q. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \max_{t \in [0,2\pi]}\{g(t)\} \Rightarrow g(t) = \max_{t \in [0,2\pi]}\{g(t)\} = \text{const.}$

En el nostre cas aquest resultat ens diu que $|f(z)| = \sup_\Omega |f| = |f(a)|$, $\forall z \in \partial D(a; r)$, per el valor de r triat.

Si repetim el mateix argument $\forall r>0$ tal que $\bar{D}(a;r) \subset \Omega$, el que tenim és que $|f(z)| = \sup_{\Omega} |f| = |f(a)|$, per a tot z en un entorn de a, p. ex. $\forall z \in D(a, r_0)$.

Ja hem vist que: $f \in H(D(a;r_0))$ i $|f| \equiv$ const. en $D(a;r_0) \Rightarrow f \equiv$ const. en $D(a;r_0)$ $\Rightarrow f \equiv$ const. en Ω.

- Corol·lari ~~(principi del màxim dèbil)~~

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domini fitat i $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow \sup_{z \in \Omega} \{|f(z)|\} = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$

(i.e., el màxim del mòdul d'una funció holomorfa sempre és a la vora del domini.)

- Demostració: És clar que si $f \equiv$ const. el resultat és cert. Si $f \not\equiv$ const., es té que $f \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow |f| \in C(\bar{\Omega})$ i $\bar{\Omega}$ compacte. Així, $|f|$ assoleix el seu valor màxim en algun punt de $\bar{\Omega}$. Però, aplicant el principi del màxim fort, si aquest màxim és en Ω, aleshores f és const. Per tant, el màxim és a $\partial\Omega$.

- Teorema (Principi del mínim fort)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domini, $f \in H(\Omega)$ i $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$. Aleshores, ~~$\exists$~~ Si existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| = \inf\{|f(z)| : z \in \Omega\} \Rightarrow f \equiv$ const.

- Demostració (Principi del mínim fort)

$f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega \Rightarrow g(z) \overset{\text{def.}}{\equiv} \frac{1}{f(z)} \in H(\Omega)$. Aplicant el principi del màxim fort a g:

si $\exists a \in \Omega$ tal que $\frac{1}{|f(a)|} = \sup_{z \in \Omega} \left\{ \left| \frac{1}{f(z)} \right| \right\} \Rightarrow \frac{1}{f} \equiv$ const.

$\Downarrow$

si $\exists a \in \Omega$ tal que $|f(a)| = \inf_{z \in \Omega} \{ |f(z)| \} \Rightarrow f \equiv$ const.

- Teorema (Principi del mínim dèbil)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domini fitat i $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, amb $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Aleshores:

$$\inf_{z \in \Omega} \{ |f(z)| \} = \inf_{z \in \partial\Omega} \{ |f(z)| \}.$$

- Demostració (exercici).

- Comentari: L'objectiu del següent bloc és provar el teorema de l'aplicació oberta segons el qual la imatge d'un conjunt obert per una aplicació holomorfa és un conjunt obert. Per fer-ho, hem de provar prèviament alguns resultats previs que tenen interès per sí mateixos.

- <u>Teorema</u> (de la funció inversa) [2a. versió]

$\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega)$. Sigui $a \in \Omega$ tal que $f'(a) \neq 0$.

Aleshores, f admet f^{-1} inversa local holomorfa de f tal que $f^{-1}(f(a)) = a$. Més concretament, $\exists\, r > 0$ tal que:

(i) $D(a;r) \subset \Omega$ (ii) $f(D(a;r))$ és un conjunt obert

(iii) $f: D(a;r) \to f(D(a;r))$ bijectiva, i per tant:

(iv) $\exists\, f^{-1}: f(D(a;r)) \longrightarrow D(a;r)$ inversa local de f t.q. $f^{-1}(f(a)) = a$

(v) $f^{-1} \in H(f(D(a;r)))$ i $(f^{-1})'(f(w)) = \dfrac{1}{f'(w)}$, $\forall w \in D(a;r)$.

- <u>Demostració</u>: Afortunadament, el fet de poder usar el teorema de la funció inversa per a funcions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i el fet de saber que si $\exists\, f^{-1}$ inversa local de f, adonada per una funció contínua, aleshores f^{-1} és holomorfa, ens facilita moltíssim la feina.

Expressem $f = u + iv$ on $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Per tant, identificant $z = x + iy \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \ni (x,y)$, podem identificar f com una aplicació de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, de la forma $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\Omega)$.

$(x,y) \mapsto f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

Si ara calculem la matriu de derivades parcials de f en a:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} u_x(a) & -v_x(a) \\ v_x(a) & u_x(a) \end{pmatrix}$$

Condicions de Cauchy-Riemann

Per tant: $\det(Df(a)) = (u_x(a))^2 + (v_x(a))^2 \underset{\uparrow}{=} |f'(a)|^2 \neq 0$ (per hipòtesis).

$f'(a) = u_x(a) + i v_x(a)$

Per tant, els punts (i), (ii), (iii), (iv) de l'enunciat són automàtics a partir del teorema de la funció inversa per funcions reals de dues variables.

El punt (v) vàrem veure que era cert només sabent que $\exists f^{-1}$ inversa local contínua de f holomorfa. (Versió 1 t^a funció inversa).

- **Lema**: Sigui $D \subset \mathbb{C}$ un disc obert i $f \in H(D)$ tal que $f(z) \neq 0, \forall z \in D$. Aleshores $\exists\, h \in H(D)$ (no única) tal que $e^h = f$ en D i $h' = f'/f$.

(Aquesta h no és única i dóna $h = \log(f)$ una determinació holomorfa del logaritme de f en D).

- **Demostració**: $f(z) \neq 0$ en $D \Rightarrow f'/f \in H(D) \Rightarrow \exists\, g \in H(D)$ tal que $g' = f'/f$ en D (i.e., f'/f té primitiva holomorfa en D). Calculem:

$$\frac{d}{dz}(f e^{-g}) = f' \cdot e^{-g} + f \cdot e^{-g} \cdot (-g') = e^{-g} \cdot (f' - f \cdot f'/f) = 0 \text{ en } D.$$

Per tant: $f e^{-g} = c = \text{const.}$ en D, on $c \neq 0 \Rightarrow f = c\, e^g = e^{g+a}$, on usem que $c \neq 0$ per escriure $c = e^a$ per un cert a. Fem: $h = g + a$.

- **Corol·lari**: Amb les mateixes hipòtesis del lema, per $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existeix $g \in H(D)$ tal que $g^\alpha = f$.

- **Demostració**: Només cal triar $g = e^{h/\alpha}$.

- <u>Teorema:</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini, $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv$ const. i $a \in \Omega$. Sigui $m \geq 1$ l'ordre del zero de $f(z) - f(a)$ en $z = a$. Aleshores, $\exists\, U \subset \Omega$ entorn obert de a, $\phi \in H(U)$ i $r > 0$ tal que:

(i) $f(z) = f(a) + (\phi(z))^m$, $\forall z \in U$, amb $\phi(a) = 0$

(ii) $\phi'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$ i $\phi : U \to D(0,r)$ és bijectiva.

En particular, $f|_{U \setminus \{a\}} : U \setminus \{a\} \to D(f(a), r^m) \setminus \{f(a)\}$ és m a 1 (i.e., tot punt del conjunt d'arribada és imatge d'exactament m del de sortida).

- <u>Demostració:</u> Pel teorema de distribució dels zeros a $f(z) - f(a)$, es té que com $f \not\equiv$ const., aleshores existeix un disc $D \subset \Omega$ centrat en a tal que $f(z) - f(a) \neq 0$, $\forall z \in D \setminus \{a\}$ (els zeros de $f(z) - f(a)$ són aïllats) i a més, $\exists\, g \in H(D)$ amb $g(a) \neq 0$, tal que

$f(z) - f(a) = (z-a)^m g(z)$ (m ordre del zero $z = a$ de $f(z) - f(a)$).

Pel Corol·lari anterior, $g(z) \neq 0$ en $D \Longrightarrow \exists\, h \in H(D)$ t.q. $h^m = g$.

Definim $\phi(z) = (z-a)h(z) \in H(D)$ verificant doncs $f(z) = f(a) + (\phi(z))^m$ en D i $\phi(a) = 0$. Per tant, ja tenim (i) en D (que no serà pas el domini U final!).

A més, $\phi'(z) = h(z) + (z-a)h'(z) \Rightarrow \phi'(a) = h(a) \neq 0$ (ja que $h(a)^m = g(a) \neq 0$).

Per tant, podem aplicar el teorema de la funció inversa per funcions holomorfes que hem enunciat a $\phi(z)$ en $z=a$, i establir l'existència d'inversa local holomorfa de ϕ tal que $\phi^{-1}(0) = a$. Si volem formalitzar els detalls de forma adequada pel context actual, aquest teorema de la funció inversa l'hem d'aplicar pròpiament a ϕ^{-1} i no pas a ϕ. Un cop establerta l'existència de tal ϕ^{-1} i usant que $(\phi^{-1})'(0) = \frac{1}{\phi'(a)} \neq 0$ això no és cap problema. Així doncs, $\exists r > 0$ tal que $\phi^{-1}: D(0;r) \to U$ és bijectiva, on $U := \phi^{-1}(D(0;r)) \subset D$ és obert i $\phi^{-1} \in H(D(0;r))$.

Per tant, $\phi: U \to D(0;r)$ és bijectiva i $\phi'(z) \neq 0$ en U, ja que la relació $\phi'(z) = \frac{1}{(\phi^{-1})'(\phi(z))}$, $\forall z \in U$, així ens ho indica. Finalment, si triem $w \in D(f(a); r^m) \setminus \{f(a)\} \Rightarrow w = f(a) + \tilde{w}$, on $0 < |\tilde{w}| < r^m$. Si volem $z \in U \setminus \{a\}$ tal que $f(z) = w$, cal: $(\phi(z))^m = \tilde{w} \Leftrightarrow \phi(z) = \tilde{w}_j := |\tilde{w}|^{1/m} \cdot e^{i(\arg(\tilde{w}) + 2\pi j)/m}$, per algun $j = 0, 1, \ldots, m-1$, que donen les m possibles arrels m-èsimes de $\tilde{w}$. Com $\tilde{w}_j \in D(0;r) \setminus \{0\}$ $\forall j = 0, 1, \ldots, m-1$, per cada j triat $\exists! z_j \in U \setminus \{a\}$ t.q. $\phi(z_j) = \tilde{w}_j$, el que ens dona que $f|_{U \setminus \{a\}}$ és m a 1.

- Teorema (de l'aplicació oberta)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ domini, $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv$ Const. $\Rightarrow$ f envia oberts en oberts.

- Demostració: Sigui $V \subset \Omega$ un obert. Volem veure que $f(V)$ és un obert. Això equival a dir que tot punt de $f(V)$ és interior. Tot punt de $f(V)$ és de la forma $f(a)$, per un cert $a \in V$. Usem el teorema anterior per escriure $f(z) = f(a) + (\phi(z))^m$, per un cert $m \geq 1$, on $\phi : U \to D(0;r)$ és holomorfa, $U \subset V$ entorn de a, $\phi(a) = 0$ i $r > 0$. A més, $f|_{U \setminus \{a\}} : U \setminus \{a\} \to D(f(a); r^m) \setminus \{f(a)\}$ és m a 1. Per tant, $\forall w \in D(f(a); r^m)$ és imatge d'almenys un $z \in U$ (de fet de m z's diferents si $w \neq f(a)$). Per tant, $D(f(a); r^m) \subset f(V)$ i $f(a)$ punt interior de $f(V)$.

- Comentari: Com a resultat final del Tema anem a enunciar i provar el resultat bàsic sobre convergència uniforme de funcions holomorfes. Pensem que si considerem una successió de funcions reals C^∞ i volem garantir que la funció límit també sigui C^∞, cal que totes les derivades convergeixin uniformement. Per funcions holomorfes tenim el caràcter C^∞ només provant convergència uniforme de les funcions:

- **Teorema** (de Weierstrass)

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions, amb $f_n \in H(\Omega)$, $\forall n \geq 1$. Suposem que, $\forall K \subset \Omega$ compacte, es té $f_n|_K \xrightarrow[n\to\infty]{} f|_K$ és uniformement convergent a una certa funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (i.e., $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix uniformement a f sobre compacts). Llavors, $f \in H(\Omega)$ i per a cada $k \geq 1$ fixat, $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(k)}$ uniformement sobre compacts en Ω.

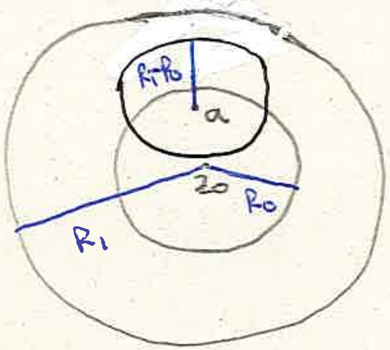
- **Demostració**: El fet de que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixi uniformement a f sobre $\forall K \subset \Omega$ compacte i que f_n sigui contínua $\forall n \geq 1$, ens diu que la funció límit f és almenys contínua en Ω. Si veiem, p.ex., que $\int_{\partial R^+} f = 0$ $\forall R \subset \Omega$ rectangle, es té $f \in H(\Omega)$. Aquest fet és òbvi via convergència uniforme, ja que podem permutar límit i integral:

$$\int_{\partial R^+} f = \int_{\partial R^+} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\partial R^+} f_n \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$f_n \to f$ unif. en $\underbrace{K = \partial R}_{\text{compacte}}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} f_n \in H(\Omega) \\ R \subset \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{\partial R^+} f_n = 0, \ \forall n \geq 1.$

Ara toca veure que, $\forall k \geq 1$, es té $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformement sobre compactes.

El primer pas és veure que aquesta convergència és uniforme en tot disc tancat $\overline{D}(z_0; R_0) \subset \Omega$. Com que Ω és obert, $\exists\, R_1 > R_0$ tal que $\overline{D}(z_0; R_1) \subset \Omega$. Això vol dir que, $\forall a \in \overline{D}(z_0; R_0)$, es té que $\overline{D}(a;$ $\overline{D}(a; R_1 - R_0) \subset \overline{D}(z_0; R_1)$. Ara apliquem les desigualtats de Cauchy



a $f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)$ en termes del disc $D(a; R_1 - R_0)$ (Veure diapositiva 38):

$$|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| \leq k! \left(\sup_{z \in \partial D(a; R_1 - R_0)} \{|f_n(z) - f(z)|\} \right) \cdot (R_1 - R_0)^{-k}$$

$$\Downarrow$$

$$|f_n^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)| \leq k! \left(\sup_{z \in \overline{D}(z_0, R_1)} \{|f_n(z) - f(z)|\} \right) \cdot (R_1 - R_0)^{-k}$$

Com que aquesta cota val $\forall a \in \overline{D}(z_0; R_0)$, obtenim:

$$\sup_{z \in \overline{D}(z_0; R_0)} \{|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)|\} \leq k! \underbrace{\sup_{z \in \overline{D}(z_0; R_1)} \{|f_n(z) - f(z)|\}}_{\downarrow\, n \to \infty \atop 0} (R_1 - R_0)^{-k}$$

$\leftarrow$ En quant $f_n|_{\overline{D}(z_0; R_1)} \to f|_{\overline{D}(z_0; R_1)}$ uniformement.

Per tant: $\sup_{z \in \bar{D}(z_0;R_0)} \{|f_m^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)|\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ que és justament la definició de convergència uniforme de $f_m^{(k)}$ a $f^{(k)}$ en $\bar{D}(z_0;R_0)$.

Finalment, si $K \subset \Omega$ és compacte qualsevol, només ens cal considerar un recobriment finit de $K \subset \bar{D}_1 \cup \cdots \cup \bar{D}_m$, on $\bar{D}_j$ disc tancat, $\bar{D}_j \subset \Omega$, $\forall j = 1, \ldots, m$. Com que $f_m^{(k)}|_{\bar{D}_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} f^{(k)}|_{\bar{D}_j}$, uniformement $\forall j = 1, \ldots, m$, es té $f_m^{(k)}|_K \xrightarrow[m\to\infty]{} f^{(k)}|_K$ uniformement (important: usem que el recobriment de K és per un nombre finit de discs!).