Funcions holomorfes i equacions de Cauchy-Riemann

- Com hem comentat, donada
$$f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = u(z) + i\cdot v(z),$$

Sempre la podem mirar com
$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

Via la identificació $\mathbb{C} \ni z = x+iy \simeq (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Per tant, podem estudiar la "derivabilitat" de $f(z)$ en termes de la derivabilitat de $f(x,y)$ com a funció "real" via l'ús de les derivades parcials.
- Malauradament, l'estudi de la "derivabilitat" de $f(z)$ en termes de $f(x,y)$ no aprofita l'estructura de cos de $\mathbb{C}$. Tot seguit anem a aprofitar aquesta estructura "multiplicativa" per introduir la <u>derivada holomorfa de $f(z)$</u>.
- En el que segueix $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un <u>obert</u>. Si en algun cas volem que sigui un <u>domini</u> (obert & connex) cal especificar-ho.

- <u>Def</u>: Derivada holomorfa (en un punt)

Donada $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ direm que és $\mathbb{C}$-diferenciable en $a \in \Omega$
$\qquad\qquad\qquad z \longmapsto f(z)$

sii. existeix el límit següent (en $\mathbb{C}$):

$$\boxed{f'(a) \stackrel{def.}{=} \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}} .$$

Anomenarem a $f'(a)$ la derivada holomorfa de f en a.

- Observem que el límit $z \to a$ es pren sobre $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
  Si $a = \alpha + i\beta$, fer $z \to a$ en $\mathbb{C}$ és com fer $(x,y) \to (\alpha, \beta)$ en $\mathbb{R}^2$.

- <u>Exemple 1</u>: $f(z) = c \in \mathbb{C}$ funció constant

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{c - c}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{0}{z - a} = \lim_{z \to a} 0 = 0$$

• <u>Exemple 2</u> : $f(z) = z^2$

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{z^2-a^2}{z-a} = \lim_{z\to a} (z+a) = 2a, \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

• <u>Exemple 3</u> : $f(z) = \bar{z}$ és $\mathbb{C}^\infty$ com a funció $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,-y)$,

però <u>no</u> és $\mathbb{C}$-diferenciable per a cap $a \in \mathbb{C}$.

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a} = \nexists$$

Cas que $f'(a)$ existís, el límit hauria de donar el mateix tant si $z\to a$ paral·lelament a l'eix real com a l'eix imaginari:

(1) triem $z = a + x$, amb $\mathbb{R} \ni x \to 0$. Llavors, per aquests z:

$$\lim_{z\to a} \frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a} = \lim_{x\to 0} \frac{\overline{(a+x)}-\bar{a}}{(a+x)-a} = \lim_{x\to 0} \frac{\bar{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

(2) triem $z = a + iy$, amb $\mathbb{R} \ni y \to 0$. Llavors, per aquests z:

$$\lim_{z\to a} \frac{\bar{z}+a}{z-a} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{(a+iy)}-\bar{a}}{(a+iy)-a} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{(iy)}}{iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

• Exemple 4: $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ només és $\mathbb{C}$-dif. en $a = 0$ (exercici)

• Proposició (Condicions de compatibilitat de Cauchy-Riemann ∄

Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω obert, és $\mathbb{C}$-dif. en $z = a$, aleshores:

(1) f és contínua en $z = a$.

(2) $\exists f_x(a)$ i $\exists f_y(a)$ i verifiquen les condicions de C.-R. en $z = a$:

$$\boxed{f_y(a) = i \cdot f_x(a)}$$

límit producte = producte límits

• Demostració:

(1) $$\lim_{z \to a} (f(z) - f(a)) = \lim_{z \to a} \left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right) \cdot (z - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Per tant $\lim_{z \to a} f(z) = f(a) \Rightarrow f$ contínua en $z = a$.

(2) El punt de partida és $\exists f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$. Aixo vol dir que aquest límit és complex per qualsevol tria de valors de $\mathbb{C} \ni z \to a$.

Expressem $z = x + iy$, $a = \alpha + i\beta$. Llavors:

$$f_x(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x+i\beta) - f(\alpha + i\beta)}{x - \alpha} = \lim_{\underbrace{(x+i\beta)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Valors de } z \to a \text{ paral·lelament eix real}}} \to \underset{\substack{\| \\ a}}{(\alpha+i\beta)}} \frac{f(x+i\beta) - f(\alpha+i\beta)}{(x+i\beta) - (\alpha+i\beta)} = f'(a).$$

$$f_y(a) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{y \to \beta} \frac{f(\alpha+iy) - f(\alpha+i\beta)}{y - \beta} = i \cdot \lim_{\underbrace{(\alpha+iy)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Valors de } z \to a \text{ paral·lelament eix imaginari}}} \to \underset{\substack{\| \\ a}}{(\alpha+i\beta)}} \frac{f(\alpha+iy) - f(\alpha+i\beta)}{(\alpha+iy) - (\alpha+i\beta)} = i \cdot f'(a)$$

Per tant, f $\mathbb{C}$-dif. en $z = a \Rightarrow i f_x(a) = i f'(a) = f_y(a)$.

- La relació $f_y(a) = i f_x(a)$ no és pas l'única forma (ni la millor forma pràctica) de formular les condicions de C.-R.

Tot seguit anem a veure diverses formes equivalents per elles.

· **Corol·lari** : Les següents condicions són equivalents i totes elles defineixen les condicions de Cauchy-Riemann per $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ en el punt $z = x + iy = a = \alpha + i\beta$.

(i) $f_y(a) = i \cdot f_x(a)$

(ii) $\left.\begin{array}{l} u_x(\alpha,\beta) = v_y(\alpha,\beta) \\ u_y(\alpha,\beta) = -v_x(\alpha,\beta) \end{array}\right\} \underset{\text{(abús notació)}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} u_x(a) = v_y(a) \\ u_y(a) = -v_x(a) \end{array}\right.$

(iii) $f_{\bar{z}}(a) = 0$.

(iv) $f_z(a) = f_x(a)$

· **Demostració** (Exercici).

· observem: $f_x = u_x + i\,v_x$, $f_y = u_y + i\,v_y$

· Recordem : $f_z \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$, $f_{\bar{z}} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(f_x + i \cdot f_y)$

• <u>observació</u>: Amb les notacions del corol·lari anterior:

f $\mathbb{C}$-dif. en $z=a \Rightarrow f'(a) = u_x(a) + i v_x(a) = v_y(a) - i u_y(a)$.

• <u>Exemple 2</u>: $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy = u + iv$

$u_x = 2x = v_y$ & $u_y = -2y = -v_x \Rightarrow f$ compleix C.-R. en $\mathbb{C}$

A més: $f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$. (cas que existeixi!)

• <u>Exemple 3</u>: $f(z) = \bar{z} = x - iy = x + i(-y) = u + iv$

$u_x = 1 \neq -1 = v_y$ & $u_y = 0 = -v_x \Rightarrow f$ $\mathbb{C}$-dif. en cap punt.

• <u>Exemple 4</u>: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u + iv$ $(v \equiv 0)$

$u_x = 2x = 0 = v_y \iff x = 0$

$u_y = 2y = 0 = -v_x \iff y = 0$

Per tant f només pot ser $\mathbb{C}$-dif. en $z = 0$.

- La pregunta natural és si les condicions de Cauchy-Riemann a més de ser <u>necessàries</u> per tal que f sigui <u>$\mathbb{C}$-diferenciable</u> en a, són també <u>suficients</u>.
- La resposta és que a més de C.-R. cal demanar alguna cosa més a f en el punt per tal que f sigui $\mathbb{C}$-dif. en a.
- Exemple: $f(z) = \dfrac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$, compleix C.-R. en $a = 0$, és contínua en $a = 0$, però no és $\mathbb{C}$-dif. en $a = 0$.
- Tot seguit veurem que si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ compleix C.-R. en un punt a, i és C^1 o almenys diferenciable en aquest punt com a funció $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, llavors f és $\mathbb{C}$-dif. en a.
- Si bé demanar C.-R. i diferenciabilitat (i potser d'altres condicions més febles poden ser suficients) val per garantir que f és $\mathbb{C}$-dif., en els exemples pràctics és més natural veure que f és C^1. De fet, si f és $\mathbb{C}$-dif. tindrem que f és automàticament C^1.

• Recordem: $\mathbb{C} \ni z = x + iy \approx (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ obert

(1) $u = u(x,y): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és diferenciable en $a = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ sii. existeixen $u_x(\alpha,\beta)$, $u_y(\alpha,\beta)$ i es compleix:

$$u(x,y) - u(\alpha,\beta) = u_x(\alpha,\beta)\cdot(x-\alpha) + u_y(\alpha,\beta)\cdot(y-\beta) + o(\|(x-\alpha, y-\beta)\|),$$

"ordre o petita"

on $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{o(\|(x-\alpha, y-\beta)\|)}{\|(x-\alpha, y-\beta)\|} = 0$

(2) $f = f(x,y): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (u,v)$, és diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$ sii. u, v són diferenciables en a.

(3) $f = f(z): \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ és diferenciable en $a \in \mathbb{C}$ sii.

$$f(z) - f(a) = f_z(a)\cdot(z-a) + f_{\bar z}(a)\cdot(\bar z - \bar a) + o(|z-a|).$$

En efecte: identificant $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ és té que u, v compleixen:

$$\left.\begin{aligned} u(z) - u(a) &= u_x(a)\cdot(x-\alpha) + u_y(a)\cdot(y-\beta) + o(|z-a|) \\ v(z) - v(a) &= v_x(a)\cdot(x-\alpha) + v_y(a)(y-\beta) + o(|z-a|) \end{aligned}\right\}$$ d'on:

$$f(z) - f(a) = f_x(a)\cdot(x-\alpha) + f_y(a)\cdot(y-\beta) + o(|z-a|)$$

Ara relacionem f_x, f_y amb $f_z, f_{\bar z}$.

$$\left.\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2}(f_x - i f_y) \\ f_{\bar z} &= \frac{1}{2}(f_x + i f_y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} f_x &= f_z + f_{\bar z} \\ f_y &= i(f_z - f_{\bar z}) \end{aligned}\right.$$

Així:

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= f_x(a)\cdot(x-\alpha) + f_y(a)(y-\beta) + o(|z-a|) = \\ &= (f_z(a) + f_{\bar z}(a))(x-\alpha) + (f_z(a) - f_{\bar z}(a))\, i(y-\beta) + o(|z-a|) \\ &= f_z(a)[(x-\alpha) + i(y-\beta)] + f_{\bar z}(a)[(x-\alpha) - i(y-\beta)] + o(|z-a|) \\ &= f_z(a)\cdot(z-a) + f_{\bar z}(a)(\bar z - \bar a) + o(|z-a|). \end{aligned}$$

(4) $f = f(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és de classe $C^1(\Omega)$ sii, existeixen les funcions derivades parcials f_x, f_y en tot Ω i a més són funcions contínues en Ω.

(5) $f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ diferenciable en Ω

- **Proposició:** $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω obert, $a \in \Omega$, f diferenciable en a ($\mathbb{C}$ com a funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$). Llavors, si f verifica les condicions de Cauchy-Riemann en $a \Rightarrow f$ és $\mathbb{C}$-diferenciable en a.

- **Demostració:** C-R en $a \Leftrightarrow f_{\bar{z}}(a) = 0$. (a més, llavors $f_z(a) = f_x(a)$)

Així, usant que f és diferenciable en a:

$$f(z) - f(a) = f_z(a)(z-a) + f_{\bar{z}}(a)(\bar{z}-\bar{a}) + o(|z-a|) =$$

$$= f_x(a) \cdot (z-a) + o(|z-a|).$$

Així:
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f_x(a) + \frac{o(|z-a|)}{z-a} \xrightarrow[z \to a]{} f_x(a) = f'(a).$$

- **Corol·lari:** Si enlloc de f diferenciable en a demanem $f \in C^1(\Omega)$, el resultat és el mateix.

- <u>Proposició</u>:

(i) f, g $\mathbb{C}$-dif. en a, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Llavors:

- $\lambda f + \mu g$ $\mathbb{C}$-dif. en a: $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$
- $f \cdot g$ $\mathbb{C}$-dif. en a: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.
- Si $g'(a) \neq 0$: $\begin{cases} 1/g \ \mathbb{C}\text{-dif. en } a: (1/g)'(a) = -g'(a)/g(a)^2 \\ f/g \ \mathbb{C}\text{-dif. en } a: (f/g)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2} \end{cases}$

(ii) f $\mathbb{C}$-dif en a & g $\mathbb{C}$-dif. en $f(a)$. Llavors:

$g \circ f$ és $\mathbb{C}$-dif. en a: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

(iii) <u>Versió 1 teorema funció inversa</u>: f $\mathbb{C}$-dif. en a, $f'(a) \neq 0$ i suposem que f és localment invertible entorn de $f(a)$ i que la inversa local f^{-1} és contínua en $f(a)$. Llavors:

f^{-1} és $\mathbb{C}$-dif. en $f(a)$ i $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$

- **Demostració (iii):** Fem $g = f^{-1}$, $b = f(a) \Rightarrow f(g(w)) = w$, $g(b) = a$.

(1) g contínua en b: si $w \to b \Rightarrow z = g(w) \to g(b) = a$.

(2) f $\mathbb{C}$ dif. en a: $f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$.

Triem ara valors de $z \to a$ de la forma $z = g(w)$ amb $w \to b$

El límit anterior implica: $f'(a) = \lim\limits_{w \to b} \dfrac{f(g(w)) - f(a)}{g(w) - a}$

(3) $$(f^{-1})'(f(a)) = g'(b) \overset{\text{def}}{=} \lim_{w \to b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \lim_{w \to b} \frac{g(w) - a}{f(g(w)) - f(a)} =$$

$$= \lim_{w \to b} \frac{1}{\left(\dfrac{f(g(w)) - f(a)}{g(w) - a} \right)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

- **Observació**: Anomenem a (iii) versió 1 del T^{a} funció inversa ja que més endavant veurem que $f'(a) \neq 0$ automàticament implica existència d'inversa local f^{-1} contínua en $f(a)$.

- <u>observació</u>: El fet que f sigui $\mathbb{C}$-dif. en un punt a "aïllat" no té cap interès!
- <u>Def.</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Direm que <u>f és holomorfa en Ω</u> sii f és $\mathbb{C}$-diferenciable $\forall a \in \Omega$. Escriurem $\boxed{f \in H(\Omega)}$
- <u>observació</u>: Per funcions d'una variable complexa:

$$\begin{aligned} f \text{ holomorfa} &= \mathbb{C}\text{-diferenciable} \\ \| \\ f \text{ analítica} &= \text{localment representable per una sèrie de potències convergent} \\ \S \\ f \text{ conforme} &= \text{preserva angles i orientació.} \end{aligned}$$

- <u>Def.</u>: $K \subset \Omega$ compacte (tancat i acotat). Direm que $f \in H(K)$ si $\exists \Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $K \subset \Omega$ tal que podem extendre f a Ω i $f \in H(\Omega)$.
- <u>Def.</u>: Si $f \in H(\mathbb{C})$ llavors es diu que f és <u>entera</u>.
- <u>Exemple</u>: $f(z) = \underbrace{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}_{\text{Polinomi en } z \text{ , } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}} \in H(\mathbb{C})$ (entera)

• Observació: si $f \in C^1(\Omega)$. Llavors:

$f \in H(\Omega) \iff f$ verifica C.-R. en tot $\Omega \iff f_{\bar z} = 0$ en Ω.

• Idea: $f \in H(\Omega)$ si un cop expressada en termes de $z, \bar z$ dona lloc a una funció (almenys C^1) que no depèn de $\bar z$.

• Exemples: $f(z) = z^2 \in H(\mathbb{C})$ i ni $f(z) = \bar z$ ni $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar z$ són holomorfes (en cap obert) de $\mathbb{C}$.

• observació: Veurem $f \in H(\Omega) \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega)$.

• observació: Si $f \in H(\Omega)$ i $\gamma = \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ és una corba derivable en tot punt, llavors $\frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

[Recordem que si $f \in C^1(\Omega)$, funció qualsevol, es té:

$$\frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = f_z(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + f_{\bar z}(\gamma(t)) \cdot \overline{\gamma'(t)} \quad .]$$

· **Def.:** Funcions harmòniques

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ obert, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$

u és harmònica en $\Omega \Leftrightarrow \Delta u := u_{xx} + u_{yy}$ verifica $\Delta u = 0$ en Ω, on Δ és l'operador de Laplace o laplacià.

· **Proposició:** Sigui $f \in H(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, $f = u + iv$. Llavors u, v són funcions harmòniques en Ω.

· **Demostració:** u, v verifiquen C.-R. en $\Omega \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Llavors:

$$\Delta u = (u_x)_x + (u_y)_y \overset{\text{C.-R.}}{=} (v_y)_x + (-v_x)_y \overset{\text{Schwarz}}{=} v_{xy} - v_{xy} = 0 \text{ en } \Omega$$

· **Corol·lari:** $f \in C^2(\Omega)$, $f = u + iv$. Llavors:

$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow u, v$ són funcions harmòniques conjugades en Ω

(i.e., u, v funcions harmòniques que verifiquen les condicions de Cauchy-Riemann)

· **Qüestió**: Donada $u = u(x,y)$ funció harmònica en un obert Ω, existeix $v = v(x,y)$ funció harmònica conjugada de u en Ω que faci que $f = u + iv \in H(\Omega)$? En altres paraules: si u és harmònica podem trobar una funció holomorfa f que la tingui com la seva part real (o imaginària)?

· **Resposta**: Sempre és posible si Ω és un "domini adequat" (simplement connex). Si no ho és, llavors depèn del cas concret.

· A efectes pràctics, podem discutir cada cas per integració directa.

P. ex.: $\boxed{u = u(x,y) = 2 \cdot x \cdot (1-y)}$ és harmònica en tot $\mathbb{R}^2$

Busquem $v = v(x,y)$ funció harmònica conjugada en $\mathbb{R}^2$, verificant:

$$(eq_1)\ \boxed{v_y = u_x = 2-2y} \qquad (eq_2)\ \boxed{v_x = -u_y = 2x}$$

Triem una de les dues equacions per ~~per~~ per $v(x,y)$ i la resolem.

P. ex., via (eq_2) obtenim:

$$v_x = 2x \Rightarrow v(x,y) = \int 2x\,dx + \underbrace{\varphi(y)}_{\text{"constant integració"}} = x^2 + \varphi(y)$$

Ara substituim $v(x,y) = x^2 + \varphi(y)$ en (eq$_1$) per tractar de determinar la funció $\varphi(y)$:

$$2-2y = v_y = \varphi'(y) \Rightarrow \varphi(y) = \int (2-2y)\,dy + C = 2y - y^2 + C$$

Finalment: $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y + C \quad (\forall C \in \mathbb{R})$

En conseqüència, $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) \in H(\mathbb{C})$.

Vegem-ho tot expressant f com a funció de z i $\bar{z}$:

$$f(x,y) = 2 \cdot x - 2xy + i\left[x^2 - y^2 + 2y + C\right]$$

Fem ara $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$:

$$f(z) = 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) - 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left[\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + C\right]$$

$$= z - \frac{z^2}{2i} + i\left[\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{-4} + \frac{z}{i} + C\right] =$$

$$= 2z + i z^2 + iC$$

· <u>Def.</u>: Donada $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal, llavors L indueix $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicació $\mathbb{R}$-lineal, concretament:

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal $\iff L(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ per certs $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Llavors, $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineal ve donada per:

$$L(z) = a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left[c\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + d\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\right] = \mu z + \sigma \bar{z},$$ on

$$\mu = \frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2} i, \quad \sigma = \frac{a-d}{2} + \frac{b+c}{2} i \in \mathbb{C}$$

· <u>Def</u>: Direm que $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineal és $\mathbb{C}$-lineal $\iff L(\lambda z) = \lambda L(z)$ $\forall \lambda, z \in \mathbb{C}$

· <u>Proposició</u>: L és $\mathbb{C}$ lineal $\iff L$ és $\mathbb{R}$ lineal i $L_{\bar{z}} \equiv 0 \iff$

$\iff L(z) = \mu z$ per un cert $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \iff$

$\iff L(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ com aplicació lineal $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

· <u>Demostració</u>: Només observem que si $L(z) = \mu z + \sigma \bar{z}$ és $\mathbb{R}$-lineal, llavors:

$$L(\lambda z) = \lambda L(z) \iff \mu(\lambda z) + \sigma(\overline{\lambda z}) = \lambda(\mu z + \sigma \bar{z}) \iff \sigma(\bar{\lambda} - \lambda)\bar{z} = 0 \iff \sigma = 0$$

• **Proposició**: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f: \Omega \to \mathbb{C}$ admet derivades parcials en Ω:

$f \in H(\Omega) \Rightarrow \forall a \in \Omega$ l'aplicació diferencial $df(a)(\cdot): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és $\mathbb{C}$ lineal i donada per $df(a)(z) = f'(a) \cdot z$

(Si, a més a més, $f \in C^1(\Omega)$, llavors l'implicació esdevé equivalència)

• **Observació**: si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ~~funció~~ general, l'expressió de la seva aplicació diferencial és $df(a)(z) = f_z(a)\, z + f_{\bar{z}}(a)\, \bar{z}$

• **Demostració** (proposició): Si $f = u + iv$, llavors la matriu de l'aplicació diferencial $df(a)(\cdot)$, mirada com aplicació de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ és la matriu jacobiana de $f = (u, v)$:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix}. \text{ Usant les condicions de C.-R. } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}:$$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} u_x(a) & -v_x(a) \\ v_x(a) & u_x(a) \end{pmatrix}$$, llavors obtenim que $df(a)(\cdot)$ és una aplicació $\mathbb{C}$-lineal de la forma $df(a)(z) = \mu z$, on $\mu = u_x(a) + i v_x(a) = f'(a)$

- **Proposició:** Sigui $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineal

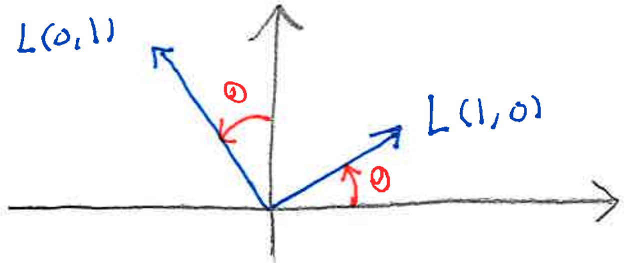
L preserva angles i orientació $\iff L \neq 0$ és $\mathbb{C}$-lineal $\iff L(z) = \mu z$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- **Demostració:**

[$\Leftarrow$] $L(z) = \mu z = (\alpha + i\beta) z$ $\mathbb{C}$-lineal, $\mu \neq 0$, llavors la corresponent $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ té com a matriu: $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ on $\theta \in [0, 2\pi)$ és

tal que $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Per tant: A és una rotació d'angle θ seguida d'una homotècia de raó $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 0 \Rightarrow L$ preserva angles i orientació ($\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$).

[$\Rightarrow$] Sigui $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineal preservant angles i orientació. Tal com es veu a la figura ha de ser $L(1,0) = \alpha(\cos\theta, \sin\theta)$, $L(0,1) = \beta(-\sin\theta, \cos\theta)$, per certs $\alpha, \beta > 0$.



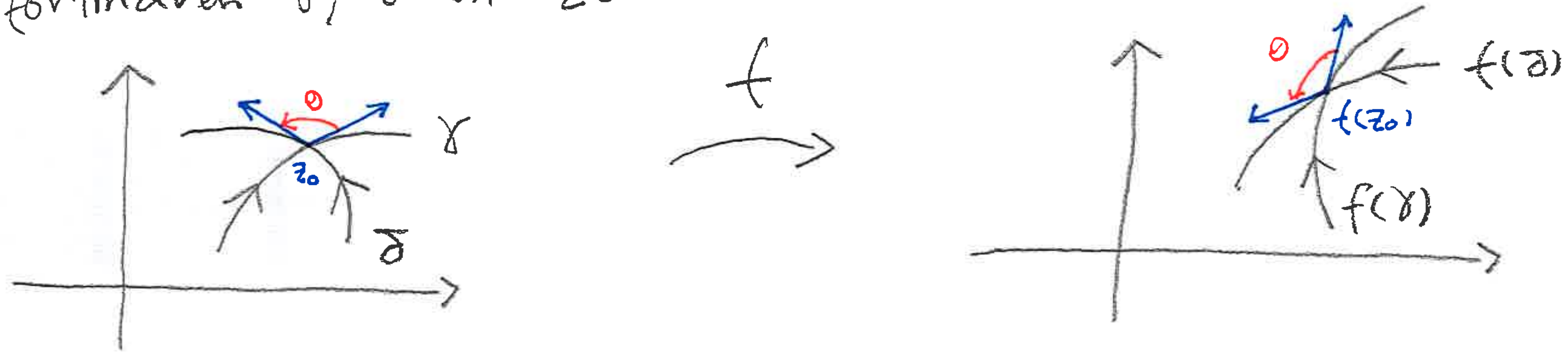
La matriu de L és doncs $A = \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta & -\beta\sin\theta \\ \alpha\sin\theta & \beta\cos\theta \end{pmatrix}$

Si demanem ara $0 = \langle L(1,1), L(1,-1) \rangle = \alpha^2 - \beta^2 \iff \alpha = \beta$

Per tant, L és $\mathbb{C}$-lineal

- <u>Def.</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in C^1(\Omega)$

Direm que f és conforme en $\Omega \iff f$ preserva angles i orientació $\iff$ si γ, δ són dos arcs de corba regular en $\mathbb{C}$ que es tallen en un punt $z_0 \in \Omega$, aleshores $f(\gamma)$ i $f(\delta)$ són dos arcs de corba que es tallen en $f(z_0)$ formant el mateix angle orientat que formaven γ, δ en z_0



- <u>Proposició</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in C^1(\Omega)$

f és conforme en $\Omega \iff$ la seva aplicació diferencial $df(a)(\cdot)$ és una aplicació lineal i conforme, $\forall a \in \Omega \iff df(a)(\cdot) \neq 0$ és $\mathbb{C}$-lineal, $\forall a \in \Omega \iff f \in H(\Omega)$ i $f'(a) \neq 0$, $\forall a \in \Omega$.

- Proposició: $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini (obert & connex), $f = u + iv$.

(i) $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv \text{const.}$

(ii) $u \equiv \text{const} \Rightarrow f \equiv \text{const.}$ $\rightarrow$ (Ídem per v. Això és: les úniques funcions holomorfes que només prenen valors reals o imaginàris purs són les funcions constants.)

(iii) $|f| \equiv \text{const.} \Rightarrow f \equiv \text{const.}$

- Demostració: Les condicions de C.-R. ens diuen $\boxed{u_x = v_y \ \& \ u_y = -v_x}$

(i) $f' = u_x + i v_x \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_x \equiv 0 \\ v_x \equiv 0 \end{Bmatrix} \overset{\text{C.-R.}}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} v_y \equiv 0 \\ u_y \equiv 0 \end{Bmatrix}$ $\Leftarrow$ en tot Ω

Per tant $u_x \equiv 0$, $u_y \equiv 0$, $v_x \equiv 0$, $v_y \equiv 0$ en Ω (obert connex) $\Leftrightarrow u \equiv \text{const},$

$v \equiv \text{const.} \Leftrightarrow f \equiv \text{const.}$

(ii) $u \equiv \text{const} \Rightarrow u_x \equiv 0, u_y \equiv 0 \overset{\text{C.-R.}}{\Leftrightarrow} v_y \equiv 0, v_x \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv \text{const.}$

(iii) $|f|^2 = u^2 + v^2 = \text{const.} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2\, u\, u_x + 2\, v\, v_x = 0 \\ 2\, u\, u_y + 2\, v\, v_y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(*)$

$\det(A) = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x \underset{\text{C.-R.}}{=} u_x^2 + u_y^2.$

- Cas $\det(A) \neq 0$ en almenys un punt $\Rightarrow (*)$ té solució $u = v = 0$ en el punt $\Rightarrow |f| \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0.$
- Cas $\det(A) \equiv 0$ en $\Omega \Leftrightarrow u_x \equiv 0, u_y \equiv 0$ en $\Omega \Leftrightarrow u \equiv \text{const}, v \equiv \text{const.} \Leftrightarrow f \equiv \text{const.}$

- Proposició (contingut complementari optatiu)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ obert i connex i $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u_x \equiv 0$, $u_y \equiv 0$ en Ω. Llavors $u \equiv$ const. en Ω.

- Recordem: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ és un obert connex $\iff$ No podem expressar Ω com a unió disjunta de dos conjunts obert no buits. Per tant:

$\Omega = U \dot\cup V$ amb $U, V \subset \mathbb{R}^2$ obert $\Rightarrow U = \phi, V = \Omega$ o vise-versa.

- Demostració (proposició)

$\boxed{\text{PAS 1}}$ $u_x \equiv 0$, $u_y \equiv 0$ en Ω obert $\Rightarrow u_{|R} =$ const. per a qualsevol rectangle $R = [a,b] \times [c,d] \subset \Omega$. En efecte:

$u_x(x,y) = 0$ en $R \Rightarrow \int_a^x u_x(s,y)\,ds = 0$ en $R \Rightarrow u(x,y) - u(a,y) = 0$ en $R \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y) = u(a,y)$ en $R \Rightarrow$ derivant respecte de y: $0 = u_y(x,y) = u_y(a,y)$ en $R \Rightarrow$

$\Rightarrow u_y(a,y) = 0$ en $R \Rightarrow \int_c^y u_y(a,s)\,ds = 0$ en $R \Rightarrow u(a,y) = u(a,c)$ en R.

Així hem vist $u(x,y) = u(a,y) = u(a,c) \equiv$ const. en R

$\boxed{\text{PAS 2}}$ triem $(x_0, y_0) \in \Omega$ (obert connex) qualsevol i fem $\alpha = u(x_0, y_0)$.

Definim: $U = \{(x,y) \in \Omega$ t.q. $u(x,y) = \alpha\}$ i $V = \Omega \setminus U$ (complementari).

Clarament: $\Omega = U \cup V$ unió disjunta i $(x_0, y_0) \in U \neq 0$

Si veiem que U, V són conjunts oberts, llavors ha de ser $U = \Omega$ i $V = \phi$.

Per tant, obtindríem $u \equiv \alpha \equiv$ const. en Ω com volem.

- $U = u^{-1}(\{\alpha\})$ és un conjunt tancat de $\mathbb{R}^2$ en quant és l'anti-imatge del conjunt tancat $\{\alpha\}$ per una funció contínua $\Rightarrow V = \Omega \setminus U$ és obert.
- Però anem a veure que U també és obert: triem $p \in U$ qualsevol.

Com que $p \in \Omega$ i Ω obert $\Rightarrow \exists R \subset \Omega$ rectangle tancat contingut en Ω i tal que $p \in \mathring{R}$ (interior de R). Pel $\boxed{\text{PAS 1}}$, sabem que $u_x \equiv 0$, $u_y \equiv 0$ en $\Omega \Rightarrow u_{|R} \equiv$ const. En ser $p \in R$, el valor d'aquesta constant és $\alpha = u(p) \Rightarrow u_{|R} = \alpha \Rightarrow R \subset U$.

Per tant, si $p \in U$ llavors existeix un rectangle $R \subset U$ que té p com a punt interior. Això implica que U és obert.

- L' exemple més natural de funcions holomorfes són els polinomis en z:

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 \in H(\mathbb{C}) \quad , \ a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C},$$

o bé, si l'expressem en termes de la base $\{1, z-a, (z-a)^2, \dots, (z-a)^m\}$, $a \in \mathbb{C}$:

$$p(z) = a_m (z-a)^m + a_{m-1} (z-a)^{m-1} + \dots + a_1 (z-a) + a_0 \in H(\mathbb{C}).$$

- també són funcions holomorfes les funcions racionals $p(z)/q(z) \in H(\Omega)$, on $p(z), q(z)$ són polinomis en z sense factors comuns, $mcd(p(z), q(z)) = 1$, i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\text{zeros de } q(z)\}$.

- Un següent conjunt de funcions holomorfes són les sèries de potències en z dins del seu disc de convergència. De fet, com veurem més endavant, tota funció holomorfa ve donada localment per una sèrie de potències convergent.

- **Def.**: Donada la successió $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ i $a \in \mathbb{C}$, introduïm la sèrie de potències centrada en a donada per:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \dots + \underbrace{a_m (z-a)^m}_{\text{terme general}} + \dots$$

- **Def.**: El radi de convergència $R \in [0, +\infty]$ de la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ~~ve~~ donat per $\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- **Teorema** (Cauchy-Hadamard)

Sigui $R \in [0, +\infty]$ el radi de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ és absolutament convergent si $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| < R$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ és divergent si $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| > R$.

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ és absolutament i uniformement convergent en el disc $\overline{D}(a, r) \subset \mathbb{C}$, $\forall r \in [0, R)$ i, per tant, també ho és en $\forall K \subset D(a, R)$, K compacte.

- <u>Criteri M de Weierstrass</u>: $(f_n)_{n\geq 0}$ una successió de funcions $f_n : S \to \mathbb{C}$ definides en $S \subset \mathbb{C}$ i $\{M_n\}_{n\geq 0}$ successió de constants reals, $M_n \geq 0, \forall n$, que compleixen: (i) $|f_n(z)| \leq M_n, \forall n \geq 0, \forall z \in S$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$.

Llavors: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ és absolutament i uniformement convergent en S.

- <u>Recordem</u>: $(a_n)_{n\geq 0}$ successió a $\mathbb{C}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ successió a $[0,+\infty)$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és convergent.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolutament convergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent.

(c) $L = \limsup_{n\to\infty} b_n \Longleftrightarrow$ • $L = +\infty$ si $\{b_n\}_{n\geq 0}$ no està acotat superiorment

• Si $\{b_n\}_{n\geq 0}$ està acotat superiorment, llavors L és el suprem del conjunt format per tots els límits de totes les subsuccessions parcials convergents de $(b_n)_{n\geq 0}$

- Demostració (Cauchy-Hadamard)

(a) $\boxed{\text{Cas } R=+\infty}$ $\quad 0 = \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\substack{\vee\!/ \\ 0}} \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (altrament,

$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \varepsilon$ per infinits $n \in \mathbb{N}$ i llavors $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \varepsilon > 0$)

Donat $0 < r < +\infty$, $\exists\, n_0 = n_0(r)$ t.q. $\forall n \geq n_0$: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2r}$.

Per tant, $|a_n| \leq \frac{1}{2^n \cdot r^n}$, $\forall n \geq n_0$.

Així, si fem $f_n(z) = a_n(z-a)^n$ i $S = \overline{D}(a;r)$, tenim $|f_n(z)| \leq M_n = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq n_0$ i $\forall z \in S$ (ja que $|z-a| \leq r$ en S). Per tant:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n(z-a)^n}_{\substack{\text{suma finita} \\ \text{(polinomi)}}} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z-a)^n}_{\substack{\text{absolutament i} \\ \text{uniformement} \\ \text{convergent en } S}}$$

(Criteri M de Weierstrass: $\sum_{n\geq n_0} M_n = 1/2^{n_0-1}$)

Per tant, obtenim (iii) per $R=+\infty$ i de pas també (i) per aquest cas.

(b) $\boxed{\text{Cas } R=0}$ $+\infty = \dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Per tant, donat $z\in\mathbb{C}\setminus\{a\}$ existeixen infinits $n\geq 0$ tals que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \dfrac{1}{|z-a|} \iff |a_n(z-a)^n|\geq 1$.

Per tant, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(z-a)^n$ no pot ser zero i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ no pot ser convergent. Això prova (ii) per aquest cas.

(c) $\boxed{\text{Cas } 0<R<+\infty}$ $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{R} \in (0,+\infty)$.

Donat $0<r<R$, expressem $r = R-2\delta$ per un cert $\delta>0$. Llavors, $\dfrac{1}{R} < \dfrac{1}{R-\delta}$ i això vol dir que $\exists\, n_0 = n_0(r)$ t.q. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{1}{R-\delta}$, $\forall n\geq n_0(r)$ (altrament, hi hauria infinits n t.q. $\sqrt[n]{|a_n|} > \dfrac{1}{R-\delta}$ i el límit superior seria doncs $\geq \dfrac{1}{R-\delta}$). Així, si fem $f_n(z) = a_n(z-a)^n$ i $S = \overline{D}(a;r)$, es té $|f_n(z)| \leq M_n = \left(\dfrac{R-2\delta}{R-\delta}\right)^n$, $\forall z\in S$, $\forall n\geq n_0$, on la raó $0<\dfrac{R-2\delta}{R-\delta}<1$. Així:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n(z-a)^n}_{\text{suma finita}} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{M-Weierstrass}}$$

permet obtenir de nou (iii), (i) per aquest cas.

Finalment, si $|z-a| = r > R$, expressem $r = R+\delta$, per un cert $\delta > 0$. Llavors,

$$\frac{1}{R+\delta} < \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \exists \text{ infinits valors de } n \geq 0 \text{ t.q. } \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{R+\delta}.$$

Per tant, si $|z-a| = r \Rightarrow |a_n(z-a)^n| \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n(z-a)^n$ no pot ser zero i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ no pot ser convergent. Això prova (ii) per aquest cas.

- observació: Si $|z-a| = R =$ radi convergència $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, llavors no podem dir res a priori sobre la convergència o no de la sèrie en la frontera del disc de convergència $\partial D(a;R) = C(a;R)$. Exemples: totes les sèries de potències següents, centrades en $a=0$, tenen radi conv. $R=1$:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ és sempre divergent si $|z|=1$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ és sempre convergent si $|z|=1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ divergeix si $z=1$ i convergeix si $|z|=1$ i $z\neq 1$ (criteri Dedekind)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n}$ divergeix en un conjunt dens de punts de $\partial D(0,1)$ que inclou totes les arrels de $z^k=1$ $\forall k\geq 1$. En canvi convergeix en un conjunt de punts de mesura total de $\partial D(0,1)$.

• <u>observació</u>: Si existeix $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, llavors el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ és $R = L$. (Criteri del quocient)

• <u>teorema</u>: sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ funció definida com a suma d'una sèrie de potències amb radi de convergència $R \in (0, +\infty]$. Aleshores:

(i) $f \in H(D(a;R))$ [holomorfa a l'interior del radi de convergència]

(ii) f és infinits cops $\mathbb{C}$-diferenciable en $D(a,R)$

(iii) $f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-a)^{n-k}$, $\forall z \in D(a;R)$, $\forall k \geq 1$

(absolutament convergent i uniformement convergent sobre compactes $K \subset D(a;R)$)

• <u>Demostració</u>: Fixeu-vos que si provem (ii), (iii) per $k=1$, els altres casos surten per inducció respecte de k.

(a) Amem a veure que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ té radi de convergència $R > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z-a)^{n-1}$ també té radi de convergència R.

Per veure-ho, denotem per R' el radi de convergència de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$:

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|n \cdot a_n|} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/n-1} \cdot \sqrt[n-1]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|a_n|}$$

on usem que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n-1} = 1$ i que si $\exists L = \lim_{n\to\infty} b_n$, llavors

$\limsup_{n\to\infty} b_n \cdot c_n = L \cdot \limsup_{n\to\infty} c_n$ (ull: el que no val és dir que el límit superior d'un producte és el producte de límits superiors). Per tant, R' és també el radi de convergència de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$.

Clarament: $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{\text{radi conv.} = R} = a_0 + (z-a) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}}_{\text{radi conv.} = R}$

D'aquí $R = R'$ ja que si la part dreta convergeix per algun $z \in \mathbb{C}$ llavors la de l'esquerra també i viseversa.

(b) Definim $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z-a)^{n-1}$ amb radi de convergència $= R$ i que, per tant, és absolutament i uniformement convergent sobre compactes.

Volem veure que, $\forall z_0 \in D(a;R)$, és te $\exists f'(z_0) = g(z_0)$. Això prova (i) i de pas (iii) per $K=1$. Per veure-ho, usem la següent fórmula (exercici):

$$\frac{u^n - v^n}{u-v} - n v^{n-1} = (u-v) \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot v^{k-1} u^{n-k-1}, \quad \forall n \geq 2, \forall u,v \in \mathbb{C}, u \neq v$$

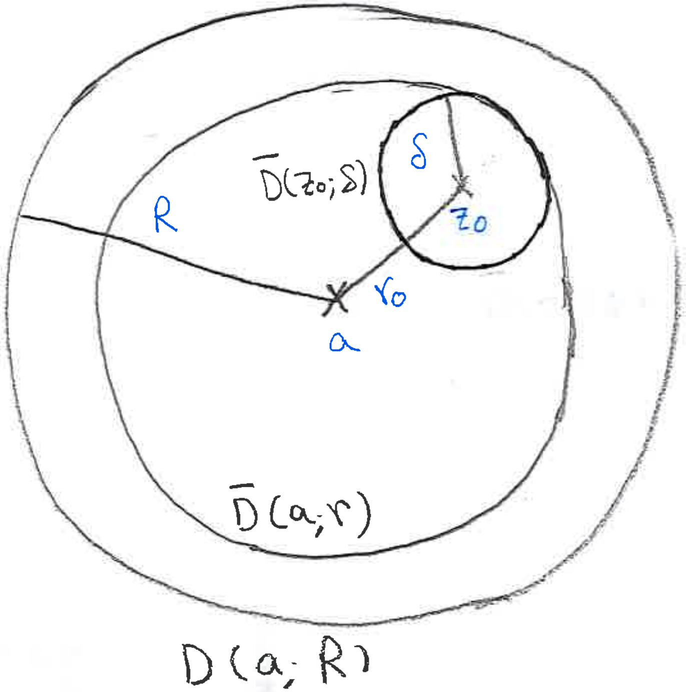
Llavors:

$$\Delta_{z_0}(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^n - (z_0-a)^n}{(z-a) - (z_0-a)} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_0-a)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n \geq 2}^{\infty} a_n \left\{ \frac{(z-a)^n - (z_0-a)^n}{(z-a) - (z_0-a)} - n (z_0-a)^{n-1} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{usem fórmula anterior} \\ \text{amb } u = z-a,\ v = z_0 - a \end{array} \right\} =$$

$$= (z-z_0) \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k (z_0-a)^{k-1} (z-a)^{n-k-1} := (z-z_0)\, h_{z_0}(z)$$

Si veiem $|h_{z_0}(z)|$ acotada en un entorn de z_0, llavors $\lim_{z \to z_0} \Delta_{z_0}(z) = 0$ i $\exists f'(z_0) = g(z_0)$.



$a \in \mathbb{C}$ i $z_0 \in D(a;R)$ estan fixats.

Per tant, $r_0 = |z_0 - a| < R$ i podem triar $\delta > 0$ prou petit per tal que $r = r_0 + \delta < R$.

Per aquest r tenim que en $\overline{D}(a;r)$ la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ és absolutament convergent. Per tant, si $|z-a| = r$ es té:

$$M_0 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty$$

Aplicant el mateix argument a $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|(z-a)^{n-1}$ i $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|(z-a)^{n-2}$, (que també tenen radi de convergència R) obtenim que

$$M_1 := \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < +\infty, \quad M_2 := \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-2} < +\infty \Rightarrow M = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 |a_n| r^{n-2} < +\infty$$

Finalment, $\forall z \in \overline{D}(a;r)$, obtenim:

$$|h_{z_0}(z)| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k (z_0 - a)^{k-1} (z-a)^{n-k-1} \right| \underset{\substack{|z_0 - a| = r_0 < r = |z-a| \\ k \le n-1}}{\le} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) r^{n-2} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 |a_n| r^{n-2}}_{= M}$$

• <u>Corol·lari</u>: Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ té radi de convergència $R>0$, llavors:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$ ("unicitat dels coeficients a_n per $f(z)$ donada), $\forall n \geq 0$.

• <u>Demostració</u>: Tenim $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-a)^{n-k} \in H(D(a,R))$

i, fent $z=a$: $f^{(k)}(a) = k(k-1)\cdots 1 \cdot a_k = k!\, a_k$

La funció exponencial

Considereu la següent equació diferencial en $\mathbb{C}$:

$$f'(z) = f(z) \qquad \& \qquad f(0) = 1.$$

En busquem solució en sèrie de potències entorn $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}.$$

A partir de l'equació diferencial per $f(z)$ tenim:

$$f'(z) = f(z) \implies f''(z) = f'(z) = f(z) \implies \cdots \implies f^{(n)}(z) = f(z).$$

Per tant: $f^{(n)}(0) = f(0) = 1, \forall n \geq 1 \implies a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$. Obtenim:

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \exp(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

e^z és l'extensió a $\mathbb{C}$ de la funció exponencial real.

e^z té radi de convergència $R = +\infty \implies \mathrm{e}^z \in H(\mathbb{C})$ (funció entera):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Proposició (Algunes propietats de l'exponencial complexa)

Si $z, w \in \mathbb{C}$:

(i) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$.

(ii) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.

(iii) $\mathrm{e}^z \neq 0$.

(iv) $\mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z$.

Demostració

(i) *Fixat $c \in \mathbb{C}$, definim $f(z) = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{c-z}$. Derivant:*

$$f'(z) = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{c-z} + \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{c-z}(-1) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \implies f(z) \equiv f(0) = \mathrm{e}^c.$$

Per tant: $\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{c-z}$. *Triant* $c = z + w \implies \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$.

(ii) $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \implies \overline{\mathrm{e}^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$. *Per tant:*

$$|\mathrm{e}^z|^2 = \mathrm{e}^z \cdot \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{\bar{z}} = \mathrm{e}^{z+\bar{z}} = \mathrm{e}^{2\cdot\mathrm{Re}(z)}.$$

- $\mathrm{e}^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} > 0 \implies \mathrm{e}^z \neq 0$.
- $\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^0 = 1 \implies \mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z$.

$$\sin(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\cosh(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots .$$

Totes elles són les extensions a $\mathbb{C}$ de les funcions de variable real del mateix nom i totes elles estan definides per sèries de potències amb radi de convergència $R = +\infty \implies$ són holomorfes en tot $\mathbb{C}$ (funcions enteres).

Proposició (Algunes propietats (Part (I)))

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. $\sin z$, $\cos z$ *verifiquen l'equació diferencial* $f''(z) = -f(z)$ *amb els valors inicials* $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$. *A més:*
$$(\sin)'(z) = \cos(z), \quad (\cos)'(z) = -\sin(z).$$
2. $\sinh z$, $\cosh z$ *verifiquen l'equació diferencial* $f''(z) = f(z)$ *amb els valors inicials* $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$. *A més:*
$$(\sinh)'(z) = \cosh(z), \quad (\cosh)'(z) = \sinh(z).$$
3. $\sin z$, $\sinh z$ *són funcions senars;* $\cos z$, $\cosh z$ *funcions parells.*
4. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
5. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ *(fórmula d'Euler).*
En particular: $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\cdot y} = \mathrm{e}^x \cdot (\cos y + \mathrm{i} \cdot \sin y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot y}| = 1, \quad |\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\cdot y}| = \mathrm{e}^x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
6. $\cos(\mathrm{i}\,z) = \cosh(z)$, $\sin(\mathrm{i}\,z) = \mathrm{i}\sinh(z)$,
$\cosh(\mathrm{i}\,z) = \cos(z)$, $\sinh(\mathrm{i}\,z) = \mathrm{i}\sin(z)$.
7. $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1) \cdot \cos(z_2) - \sin(z_1) \cdot \sin(z_2)$,
$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1) \cdot \cos(z_2) + \cos(z_1) \cdot \sin(z_2)$.

Proposició (Algunes propietats (Part (II)))

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

8. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1) \cdot \cosh(z_2) + \sinh(z_1) \cdot \sinh(z_2)$,
$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1) \cdot \cosh(z_2) + \cosh(z_1) \cdot \sinh(z_2)$.
9. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, z}$, $\cos z$, $\sin z$ *són funcions periòdiques en* z *de període* 2π.
e^{z}, $\cosh z$, $\sinh z$ *són funcions periòdiques en* z *de període* $2\pi\,\mathrm{i}$.
10. $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2\pi\,\mathrm{i}\, k$, *per algun* $k \in \mathbb{Z}$.

Demostració

10. *Per l'exponencial real:* $\mathrm{e}^{x} = 1 \iff x = 0$. *Per les funcions sinus i cosinus reals:* $\sin x = 0, \cos x = 1 \iff x = 2\pi\, k$, *per* $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \implies \mathrm{e}^{z_1 - z_2} = 1 \implies |\mathrm{e}^{z_1 - z_2}| = 1 \implies \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z_1 - z_2)} = 1.$$

D'aquí: $\mathrm{Re}(z_1 - z_2) = 0 \implies z_1 - z_2 = c \cdot \mathrm{i}$, *per algun* $c \in \mathbb{R}$. *Així:*

$$1 = \mathrm{e}^{c \cdot \mathrm{i}} = \cos(c) + \mathrm{i}\,\sin(c) \iff \cos(c) = 1,\ \sin(c) = 0.$$

En conseqüència: $c = 2\pi\, k$, *per algun* $k \in \mathbb{Z}$.

Logarítme complex

e^z periòdica en z, de període $2\pi\,\mathrm{i}$, ens diu que e^z **no és** injectiva en tot $\mathbb{C}$ i, per tant, **no pot** tenir inversa global (definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. **Sí** que podem discutir l'existència **d'inverses locals** de e^z, que anomenarem logarítmes. Concretament, si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\mathrm{e}^z = w \iff z \overset{\text{def.}}{=} \log w = \ln |w| + \mathrm{i} \cdot \arg(w),$$

$\ln(\cdot)$ és el logarítme neperià **real** i $\arg(\cdot)$ l'argument. La funció $\arg(\cdot)$ és multi-valuada: si $\arg(w)$ pren un cert valor, llavors $\arg(w) + 2\pi\, k$ també és un possible valor per l'argument, $\forall k \in \mathbb{Z}$. En efecte:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z)} = |w|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\arg(w)} \implies \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = |w| \implies \mathrm{Re}(z) = \ln|w|,$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\arg(w)} \implies \mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z) = \mathrm{i}\cdot\arg(w) + 2\pi\mathrm{i}\, k.$$

Per tant, l'equació $\mathrm{e}^z = w$ té infinites solucions, que donen lloc a infinites determinacions o branques de la funció logarítme.

• **Def.:** $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Direm que f és una branca del logaritme si f és contínua i $z = \exp(f(z)) = e^{f(z)}$, $\forall z \in \Omega$.

Escriurem $f(z) = \log(z)$.

. Observem que en quant a inversa contínua de e^z (holomorfa), llavors $\log(z) \in H(\Omega)$ i, a més, $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, per alguna determinació contínua de $\arg(z)$ en Ω. ($\arg(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$)

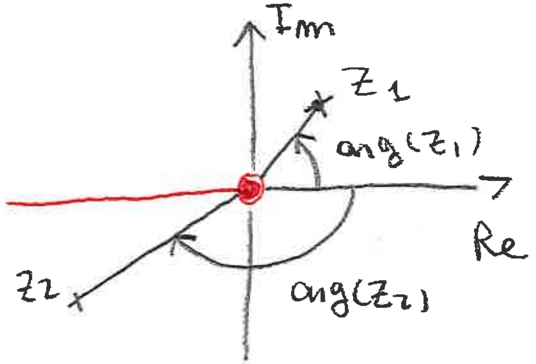
. A més, $f'(z) = \dfrac{1}{(\exp)'(f(z))} = \dfrac{1}{\exp(f(z))} = \dfrac{1}{z}$, $\forall z \in \Omega$.

- **Proposició:** Si f, g són dues branques del logaritme en un domini Ω, aleshores existeix un $k \in \mathbb{Z}$ de forma que

$$f(z) = g(z) + 2\pi k i, \quad \forall z \in \Omega$$

. **Demostració:** Fem $h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z))$ funció contínua amb valors enters $\Rightarrow h \equiv \text{Const.}$ en cada component connexa de Ω. En ser Ω connex $\Rightarrow h(z) = k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \Omega$.

- **Def.:** Branca principal del logaritme



Triem: $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$

$$= \mathbb{C} \setminus \underbrace{[-\infty, 0]}_{\text{semi-recta real negativa } \cup \{0\}}.$$

$$\arg(\cdot): \Omega \longrightarrow (-\pi, \pi) \qquad z \longmapsto \arg(z)$$

determinació contínua de l'argument, definida de forma que $\arg(z) = 0$ si $z \in \mathbb{R}$ amb $z > 0$.

Aleshores,

$\log(z) := \ln|z| + i \arg(z)$ és la branca principal del logaritme

- $\log(z) \in \mathbb{R}$ si $z \in (0, +\infty)$: extensió holomorfa de $\ln(\cdot)$
- No podem extendre aquesta branca a la semi-recta real negativa $(-\infty, 0]$ ja que la tria que fem de $\arg(z)$ no admet extensió contínua a $(-\infty, 0]$.

- Explícitament: $$\underbrace{\ln\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{2 \cdot \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{v(x,y)} = \underbrace{\log z}_{\text{branca principal}}$$

• Exercici:

(1) observem que si $z = x+iy \in \Omega$ i calculem $\theta = \arg(z)$ resolent $\tan\theta = y/x$, llavors hi ha dues possibles solucions per $\theta \in (-\pi,\pi)$ (però només una és la bona depenent del quadrant al que pertany (x,y)).

(2) Si $\theta = \arg(z) \in (-\pi,\pi) \Rightarrow \theta/2 \in (-\pi/2,\pi/2)$ i, per tant, el valor de $\tan(\theta/2)$ determina $\theta/2$ via la funció $\arctan(\cdot): \mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$.

(3) $\theta = \arg(z) \Leftrightarrow x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$. Llavors:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{y/|z|}{1+x/|z|} = \frac{y}{|z|+x} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

(4) Verifiquem que, efectivament, $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ verifiquen les condicions de Cauchy-Riemann.

• Comentari: obviament, podem definir moltes altres branques del logaritme. El més natural, és triar $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\text{semi-recta pel } (0,0)\}$ i definir $\arg(\cdot)$ de forma contínua en Ω. Veurem que es pot definir una branca del logaritme en tot $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini simplement connex i $0 \notin \Omega$.

- Podem usar una branca qualsevol de $\log(\cdot)$ per definir una branca de z^{α}, on $\alpha \in \mathbb{C}$ és fixat:

- Def.: $\Omega \subset \mathbb{C}$ domini, $\log(\cdot): \Omega \to \mathbb{C}$ branca del logaritme. Donat $\alpha \in \mathbb{C}$, definim: $z^{\alpha} := e^{\alpha \cdot \log(z)} : \Omega \to \mathbb{C}$

(i) $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow z^{\alpha}$ té una única determinació independentment de la branca triada.

(ii) $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$, $q > 0$ (racional irreductible) $\Rightarrow z^{\alpha}$ té q possibles determinacions.

(iii) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow z^{\alpha}$ té ∞'s determinacions.

- Exemple: Obtenim els següents valors, vàlids $\forall k \in \mathbb{Z}$

(1) $i^{i} = e^{i \cdot \operatorname{Log}(i)} = e^{i[\ln|i| + i \cdot \arg(i)]} = e^{i[0 + i(\pi/2 + 2\pi k)]} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$,

(2) $(1+i)^{i} = e^{i \operatorname{Log}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i\arg(1+i)]} = e^{i[\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi k)]} =$

$= e^{-(\pi/4 + 2\pi k)} \cdot e^{i\ln(\sqrt{2})} = e^{-(\pi/4 + 2\pi k)} \cos(\ln(\sqrt{2})) + i\, e^{-(\pi/4 + 2\pi k)} \cdot \sin(\ln(\sqrt{2}))$