Càlcul 2: Transformada de Laplace

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

5 de Febrer de 2024

- Def.: Sigui $f: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció donada.
$t \longmapsto f(t)$

La seva transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)](s)$ és una nova funció de $s \in \mathbb{R}$ definida per la fórmula integral següent:

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot t} f(t)\,dt} \qquad (1)$$

De fet doncs, $\mathcal{L}[f(t)](s)$ està definida per tots aquells valors de $s \in \mathbb{R}$ pels quals la integral impròpia (1) estigui ben definida ((1) és impròpia a $+\infty$ i de vegades en $t=0$).

- Comentari: Si modifiquem els valors de $f(t)$ en un conjunt de "longitud zero" (p. ex. en un nombre finit de punts) aleshores la funció transformada de Laplace de la funció original i de la modificada són la mateixa. Així doncs, podem obtenir la mateixa funció $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[\tilde{f}(t)](s)$ amb $f(t)$ i $\tilde{f}(t)$ funcions diferents. El que sí és cert és que si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ i $f(t)$ és contínua, llavors és la única funció contínua que pot donar lloc a $F(s)$.

- Exemple 1: Sigui $a \in \mathbb{R}$, llavors:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) \stackrel{def.}{=} \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)\cdot t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s-a}, \text{ si } s>a,$$

on usem que $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} = \begin{cases} 0, & \text{si } a-s<0 \Leftrightarrow s>a \\ +\infty, & \text{si } a-s>0 \Leftrightarrow s<a \end{cases}$ (Quan $s=a$ és clar que la integral impròpia divergeix).

• En el cas particular $a=0$:

$$\mathcal{L}[1](s) = 1/s, \quad \text{si } s>0.$$

- Exemple 2: Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$, llavors:

$$\mathcal{L}[t^\alpha](s) \stackrel{def.}{=} \int_0^{+\infty} t^\alpha \cdot e^{-st} dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Suposem } s>0}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{canvi:} \\ u = s \cdot t \\ du = s\, dt \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{s} =$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du}_{\substack{\parallel \text{def.} \\ \Gamma(\alpha+1) \equiv \text{funció Gamma d'Euler avaluada en } \alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \text{si } s>0 \text{ i } \alpha>-1$$

(observeu que si $s<0$ llavors la integral impròpia que defineix la transformada és divergent; si $s=0$ llavors $\int_0^{+\infty} t^\alpha dt$ és sempre divergent; Finalment, $\Gamma(\alpha+1)$ només té sentit si $\alpha+1>0$.)

- <u>Def.</u>: La funció Gamma d'Euler és la funció definida per la integral:

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} u^{p-1} \cdot e^{-u}\, du \ , \quad \text{si } p > 0}$$ (altrament, $\Gamma(p)$ divergeix)

Algunes propietats de la funció Gamma són:

(1) $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

(2) $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$, $\forall p > 0$.

(3) $\Gamma(\cdot)$ és C^∞ si $p > 0$ i $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} (\ln u)^k \cdot u^{p-1} \cdot e^{-u}\, du$.

- Combinant l'exemple 2 amb la propietat (1) es té:

(i) Fent $\alpha = n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$.

(ii) Fent $\alpha = -1/2$: $\mathcal{L}[t^{-1/2}](s) = \mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right] = \dfrac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$, $s > 0$

- A més, la propietat (3) la usem per calcular la transformada de $\ln(t)$ si $s > 0$:

$$\mathcal{L}[\ln t](s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-st}\, dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Canvi:} \\ u = st \\ du = s\cdot dt \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{u}{s}\right) e^{-u} \frac{du}{s} =$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} (\ln(u))^1 \cdot u^{1-1} \cdot e^{-u}\, du - \frac{\ln(s)}{s} \int_0^{+\infty} u^{1-1} \cdot e^{-u} du =$$

$$= \frac{1}{s}\Gamma'(1) - \frac{\ln(s)}{s} \cdot \underset{\uparrow}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma'(1) - \ln(s)}{s}.$$

$\Gamma(1) = \Gamma(0+1) = 0! = 1$

- Llista d'algunes transformades bàsiques:

(1) $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$; $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $s > 0$ $\left(\begin{array}{l} \mathcal{L}[t] = 1/s^2 \\ \mathcal{L}[t^2] = 2/s^3 \end{array} \right)$

(2) $\mathcal{L}[t^\alpha] = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $s > 0$ i $\alpha > -1$; $\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$, $s > 0$

(3) $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$

(4) $\mathcal{L}[\sin(bt)] = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ i $\mathcal{L}[\cos(bt)] = \dfrac{s}{s^2+b^2}$, $s > 0$

(5) $\mathcal{L}[\sinh(bt)] = \dfrac{b}{s^2-b^2}$ i $\mathcal{L}[\cosh(bt)] = \dfrac{s}{s^2-b^2}$, $s > b$

(6) $\mathcal{L}[\ln t] = \dfrac{\Gamma'(1) - \ln(s)}{s}$

- La idea fonamental per calcular la transformada $\mathcal{L}[f(t)](s)$ d'una funció donada és evitar, en la mesura del possible, calcular-la usant la seva definició integral. Tractarem doncs d'obtenir-la via la taula de transformades que hem donat, combinada amb les propietats bàsiques de la transformada que veurem. Recordeu, però, que poden portar la taula de transformades de la pàg. següent a l'examen

Taula de $\mathcal{L}$-transformades

Definició	
$f(t), \quad t > 0$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
Propietats	
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
$\lambda f(t)$	$\lambda F(s)$
$f(at), \quad a > 0$	$(1/a) F(s/a)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a), \quad a > 0$	$e^{-as} F(s)$
$D^N f(t)$	$s^N F(s) - s^{N-1} f(0) - s^{N-2} f'(0) - \ldots - D^{N-1} f(0)$
$t^N f(t)$	$(-1)^N D^N F(s)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$F(s)/s$
$f(t)/t$	$\int_s^{+\infty} F(\sigma) d\sigma$
$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$
$f(t+T) = f(t)$	$F(s) = 1/(1-e^{-sT}) \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
$\lim_{0^+} f(t) = \lim_{+\infty} sF(s)$; $\lim_{+\infty} f(t) = \lim_{0^+} sF(s)$	
Exemples	
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
1	$1/s$
e^{at}	$1/(s-a)$
t^N	$N!/s^{N+1}$
t^α	$\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$
$\sin bt$	$b/(s^2+b^2)$
$\cos bt$	$s/(s^2+b^2)$
$\sinh bt$	$b/(s^2-b^2)$
$\cosh bt$	$s/(s^2-b^2)$
$(\sin bt - bt \cos bt)/(2b^3)$	$1/(s^2+b^2)^2$
$(bt \cosh bt - \sinh bt)/(2b^3)$	$1/(s^2-b^2)^2$
$(\sin bt)/t$	$\arctan(b/s)$
$\ln t$	$(\Gamma'(1) - \ln s)/s$

- Exemples no existència de la transformada: No per a tota funció $f(t)$ definida per $t>0$ en podem calcular $\mathcal{L}[f(t)]$. Per exemple, no existeix ni $\mathcal{L}[1/t](s)$ ni $\mathcal{L}[e^{t^2}](s)$, per cap valor de $s \in \mathbb{R}$. La raó és que les integrals impròpies $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-st}\, dt$ i $\int_0^{+\infty} e^{t^2} \cdot e^{-st}\, dt$ són sempre divergent, la 1a. en $t=0$ i la 2a. quan $t \to +\infty$.

- Qüestió natural: Sota quines condicions podem garantir que $\exists\, \mathcal{L}[f(t)](s)$?

- Def.: Donada $\begin{array}{l} f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto f(t) \end{array}$, direm que f és contínua a trossos, i escriurem $f \in CT((0,+\infty))$, si per tot interval $[a,b] \subset (0,+\infty)$ és té que f és contínua en $[a,b]$ excepte, com a molt, en un nombre finit de punts on tenim discontinuïtats evitables o de salt (mai asimptòtiques!).

- Def: Donada $\begin{array}{l} f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto f(t) \end{array}$, direm que f és d'ordre exponencial (α, M) si existeix $T>0$ tal que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, $\forall t \geq T$.

- Def. Donada $\begin{array}{l} f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto f(t) \end{array}$, direm que f és integrable prop de zero si $\int_0^{\delta} f(t)\, dt$ està ben definida per algun $\delta>0$ (potser com integral impròpia).

- Teorema (Condicions necessàries existència $\mathcal{L}[f(t)](s)$)

Sigui $f \in CT((0,+\infty))$, d'ordre exponencial (α, M) i integrable prop de zero.

Aleshores, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ definida, almenys, $\forall s > \alpha$. A més:

(i) $F(s) \in C^{\infty}((s_0,+\infty))$ (ii) $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$ (obs.: L'extrem inferior s_0 de l'interval de definició de $F(s)$ és l'abscissa de convergència)

- Propietats de la Transformada de Laplace:

(I) Linealitat:

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

- Exemple: Useu $\mathcal{L}[e^{bt}] = \frac{1}{s-b}$ per calcular $\mathcal{L}[\sinh(bt)]$:

$$F(s) = \mathcal{L}[\sinh(bt)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{bt}-e^{-bt}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{bt}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-bt}] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-b} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-(-b)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right) = \frac{1}{2}\frac{(s+b)-(s-b)}{(s-b)(s+b)} = \frac{1}{2}\frac{2b}{s^2-b^2} = \frac{b}{s^2-b^2}.$$

(II) Canvi d'escala:

Si denotem $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, aleshores:

$$\mathcal{L}[f(a\cdot t)](s) = \frac{1}{a}F(s/a).$$

- Exemple: Useu que $\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$ per calcular $\mathcal{L}[e^{at}]$.

Fem $f(t) = e^t$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s-1}$. Llavors:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \mathcal{L}[f(a\cdot t)] = \frac{1}{a} F(s/a) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s/a - 1}\right) = \frac{1}{s-a}.$$

(III) 1er. Teorema de translació

Fem $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$. Aleshores:

$$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)](s) = F(s-a) = \mathcal{L}[f(t)](s)\Big|_{s \to s-a}$$

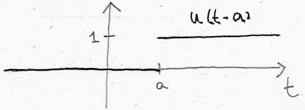
- Exemple: Useu $\mathcal{L}[\sin(bt)] = \frac{b}{s^2+b^2}$ i $\mathcal{L}[\cos(bt)] = \frac{s}{s^2+b^2}$ per calcular:

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin(bt)] = \mathcal{L}[\sin(bt)]_{s \to s-a} = \left(\frac{b}{s^2+b^2}\right)_{s \to s-a} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos(bt)] = \mathcal{L}[\cos(bt)]_{s \to s-a} = \left(\frac{s}{s^2+b^2}\right)_{s \to s-a} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

- Def.: $u(t-a)$ funció esglaó unitari o de Heaviside en $t=a$.

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t > a \end{cases}$$



(IV) 2on teorema de translació

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, aleshores:

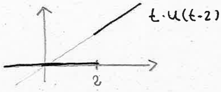
$$\mathcal{L}[f(t-a)\cdot U(t-a)](s) = e^{-as}\cdot \mathcal{L}[f(t)](s) = e^{-as}\cdot F(s)$$

- Exemple 1: $\mathcal{L}[U(t-a)](s) = e^{-as}/s$ (En aquest cas triem $f(t) \equiv 1$ i $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$).

- Exemple 2: Calculeu:

$$\mathcal{L}[t\cdot U(t-2)] = \mathcal{L}[((t-2)+2)\cdot U(t-2)] \underset{\uparrow\ \boxed{f(t)=t+2}}{=} \mathcal{L}[f(t-2)\cdot U(t-2)] \underset{\uparrow\ \boxed{a=2}}{=} e^{-2s}\mathcal{L}[f(t)] =$$

$$= e^{-2s}\mathcal{L}[t+2] = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$$



- Exemple 3: Calculeu $\mathcal{L}[g(t)]$, on:

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos(t), & 0 < t < \pi/2 \\ 0, & t > \pi/2 \end{array} \right\} = \cos(t)\cdot\left(1 - U(t-\pi/2)\right), \text{ on } 1 - U(t-\pi/2) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & 0 < t < \pi/2 \\ 0, & t > \pi/2 \end{array} \right.$$

Així:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\cos(t)] - \mathcal{L}[\cos(t)\cdot U(t-\pi/2)] = \mathcal{L}[\cos(t)] + \mathcal{L}[\sin(t-\pi/2)\cdot U(t-\pi/2)],$$

on hem usat: $\cos(t) = \cos(t - \pi/2 + \pi/2) = \cos(t-\pi/2)\cdot\cos(\pi/2) - \sin(t-\pi/2)\cdot\sin(\pi/2) = -\sin(t-\pi/2)$

Ara, tenint $a = \pi/2$ i $f(t) = \sin(t)$:

$$\mathcal{L}[\sin(t-\pi/2)\cdot U(t-\pi/2)] = \mathcal{L}[f(t-a)\cdot U(t-a)] = e^{-sa}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-\pi/2\cdot s}\mathcal{L}[\sin(t)] = e^{-\pi/2\cdot s}\cdot\frac{1}{s^2+1^2}$$

Per tant: $\mathcal{L}[g(t)] = \dfrac{s}{s^2+1} + e^{-\pi/2\cdot s}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$

9

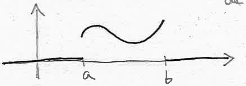
- <u>Observació</u>: Si volem usar el 2on. teorema de translació per calcular la transformada d'una funció $g(t)$ definida a trossos, de la forma:

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & 0 < t < a \\ g_2(t), & t \geq a \end{cases}$$

Observem: $g(t) = g_1(t) \cdot (1 - U(t-a)) + g_2(t) \cdot U(t-a)$

- <u>Exercici</u>: Representem en termes de funcions esglaó (Indicació: pensem en la diferència de funcions esglaó?).

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ h(t), & a < t < b \\ 0, & t > b \end{cases}$$



(V) Derivada d'una transformada

- Derivada 1a.: $\dfrac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[f(t)](s)\right) = -\mathcal{L}[t \cdot f(t)](s)$.
- Derivada n: $\dfrac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f(t)](s)\right) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n \cdot f(t)](s)$.

(Cada derivada introdueix un canvi de signe i una t multiplicant la funció).

- <u>Observació</u>: Típicament és més útil llegir-ho al revés:

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[f(t)]\right) \quad i \quad \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f(t)]\right)$$

10

- *Exemple*: Calculeu:

$$\mathcal{L}[t^2 \cdot \sin(bt)] \underset{\uparrow}{=} (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\mathcal{L}[\sin(bt)]\right) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}\right) = \frac{6bs^2-2b^3}{(s^2+b^2)^3}.$$

Canviem t^2 per 2 derivades i $(-1)^2$

(VI) Integral d'una transformada: Fem $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$. Llavors:

$$\int_s^{+\infty} F(u)\,du = \mathcal{L}[f(t)/t](s).$$

Obs.: Més útil al revés, per calcular $\mathcal{L}[f(t)/t]$

- *Exemple*: Calculeu, per $b>0$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(bt)}{t}\right] \underset{\uparrow}{=} \int_s^{+\infty} F(u)\,du = \int_s^{+\infty} \frac{b}{u^2+b^2}\,du = \int_s^{+\infty} \frac{d(u/b)}{(u/b)^2+1} = \Big[\arctan(u/b)\Big]_{u=s}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s/b)$$

$f(t) = \sin(bt) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{b}{s^2+b^2}$

Podem simplificar aquesta expressió usant la següent propietat de l'arctangent:

$$\underbrace{\arctan(x) + \arctan(1/x)}_{} = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x>0$$

(*Exercici*: deriveu $\boxed{\text{això}}$ i veieu que dóna zero i per tant és constant.)

Finalment donem: $\mathcal{L}\left[\frac{\sin(bt)}{t}\right] = \arctan(b/s)$ (Val també si $b<0$).

(VII) Transformada d'una derivada:

Si denotem $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, es té:

- Derivada 1a.: $\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$.
- Derivada 2a: $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
- Cas general: $\mathcal{L}[f^{(k)}(t)](s) = s^kF(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$.

- Exemple: Useu la propietat (VII) per calcular $F(s) = \mathcal{L}[\sin(bt)]$ i $G(s) = \mathcal{L}[\cos(bt)]$.

Fem $f(t) = \sin(bt)$ i $g(t) = \cos(bt)$. Per elles tenim:

- $f'(t) = b\cos(bt)$, $f''(t) = -b^2\sin(bt)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = b$. Llavors:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \Rightarrow \mathcal{L}[-b^2\sin(bt)] = s^2F(s) - s\cdot 0 - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b^2F(s) = s^2F(s) - b \Rightarrow (s^2+b^2)F(s) = b \Rightarrow F(s) = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

- $g'(t) = -b\sin(bt)$, $g''(t) = -b^2\cos(bt)$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$. Llavors:

$$\mathcal{L}[g''(t)] = s^2G(s) - sg(0) - g'(0) \Rightarrow \mathcal{L}[-b^2\cos(bt)] = s^2G(s) - s\cdot 1 - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b^2G(s) = s^2G(s) - s \Rightarrow G(s) = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

12

- *Def.*: Donades dues funcions $f, g \in CT((0,+\infty))$, definim el seu producte de convolució mitjançant la següent fórmula integral:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\, d\tau, \quad \forall t>0. \quad \left(\text{observació: } f*g = g*f\right)$$

(VIII) Transformada del producte de Convolució:

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ i $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$, aleshores:

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\cdot \mathcal{L}[g(t)](s) = F(s)\cdot G(s).$$

(IX) Transformada d'una integral (Cas particular de (VIII) fent $g \equiv 1$):

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{F(s)}{s}.$$

- Exemple 1: Calculeu

$$\mathcal{L}\left[t\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Canviem } t \text{ per } -\frac{d}{ds}}}{=} -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right]\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (IX)}}{=} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}[t e^{-t}]\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Canviem } t \text{ per } -\frac{d}{ds}}}{=} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[e^{-t}]\right)\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{2}{s(s+1)^3} = \frac{3s+1}{s^2(s+1)^3}$$

-Exemple 2: Useu la transformada de Laplace (i la transformada de Laplace inversa) per resoldre la següent equació integral per $f(t)$:

$$t - 2f(t) = \underbrace{\int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau}) \cdot f(t-\tau)\, d\tau}_{2 \cdot \sinh(t) * f(t)}$$

Busquem $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ enlloc de $f(t)$. Apliquem $\mathcal{L}$ a l'equació:

$$\mathcal{L}\{t\} - 2\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{\sinh(t) * f(t)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transformada convolució}}}{=} 2\mathcal{L}\{\sinh(t)\} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}.$$ Per tant:

$$\frac{1}{s^2} - 2F(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2-1} \cdot F(s) \Rightarrow 2\left[\frac{1}{s^2-1} + 1\right] \cdot F(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \frac{2s^2}{s^2-1} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{2s^4}(s^2-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^4}.$$

Per tant, podem recuperar la solució $f(t)$ via transformada inversa o anti-transformada de Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}[1/s^2] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}[1/s^4] = \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}t^3.$$

on usem: $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[1/s^2] = t$.

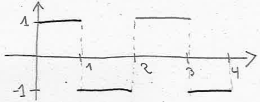
$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[1/s^4] = t^3/3! = t^3/6.$$

(X) Transformada d'una funció periòdica:

Sigui $f \in CT((0,+\infty))$ una funció periòdica de període $T>0$ (això és, $f(t+T)=f(t)$ per tot $t>0$). Aleshores:

$$\mathcal{L}[f(t)](s)=\frac{1}{1-e^{-s \cdot T}}\int_0^T e^{-st}\cdot f(t)\,dt$$

- Exemple: Calculeu la $\mathcal{L}[f(t)](s)$ on $f(t)$ és la funció periòdica següent:



(El seu període és $T=2$)

$$f(t)=\begin{Bmatrix} 1, & t\in(0,1) \\ -1, & t\in(1,2)\end{Bmatrix} + \text{extensió periòdica de període } T=2.$$

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \underset{(X)}{=} \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\int_0^1 e^{-st}\,dt - \int_1^2 e^{-st}\,dt\right\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=1} - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=1}^{t=2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\frac{e^{-s}}{-s}+\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\right\} = \frac{1}{s(1-e^{-2s})}(1-2e^{-s}+e^{-2s}) = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$$

- Exercici: Calculeu $\mathcal{L}\{f(t)\}$ per l'ona triangular de la figura

$$f(t)=\begin{Bmatrix} t, & t\in(0,1) \\ 2-t, & t\in(1,2)\end{Bmatrix} + \text{extensió periòdica de període } T=2.$$

Solució: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$ (Cal integrar per parts!)

15

- Def.: Transformada de Laplace inversa o anti-transformada.

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, aleshores direm que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ és una transformada de Laplace inversa de $F(s)$.

- observacions:

(1) Si $F(t)$ admet una anti-transformada contínua $f(t)$, aquesta és la única possible anti-transformada contínua de $F(s)$. Si l'anti-transformada $f(t)$ és $CT((0,+\infty))$, qualsevol altra anti-transformada només pot diferir d'aquesta en els punts de discontinuïtat (salt) de $f(t)$. És per això que quan parlem del càlcul de $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ ens referirem al càlcul de la seva anti-transformada, simplement sabent que és única en $CT((0,+\infty))$ tret d'aquests matisos.

(2) No tota funció $F(s)$ donada admet anti-transformada de Laplace. Com ja hem comentat, si $f(t) \in CT((0,+\infty))$ i en podem calcular la seva transformada $F(s)$, aleshores $F(s)$ és C^∞ i $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$. Així doncs, si $F(s)$ no verifica aquestes dues condicions de segur que $\nexists\, f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, almenys per cap $f(t) \in CT((0,+\infty))$. Així és clar, p. ex., que $\nexists\, \mathcal{L}^{-1}[s]$, ja que $F(s) = s$ no té límit zero quan $s \to +\infty$. Però tampoc existeix, p. ex., $\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}]$, malgrat $F(s) = e^{-s}$ sí té límit zero quan $s \to +\infty$.

- Valors inicials i finals de la anti-transformada: Sigui $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{F}(s)]$. Llavors:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} f(t) &= \lim_{s\to +\infty} s\cdot F(s) \\ \lim_{t\to +\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} s\cdot F(s) \end{aligned}\right\}$$ Sempre que els límits existeixin.

- Exemples bàsics de càlcul de l'anti-transformada

$$\mathcal{L}^{-1}[1/s] = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}[1/s^2] = t, \quad \mathcal{L}^{-1}[1/s^n] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{si } n \geq 1.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+b^2}\right] = \frac{\sin(bt)}{b}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right] = \cos(bt)$$

(Per més exemples, llegir al revés la taula de transformades de la diapositiva 6).

- Teoremes de translació per anti-transformades

(1) $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ (això és: si volem calcular $\mathcal{L}^{-1}$ d'una funció que depèn no de s, sinó de $s-a$, aleshores podem treure la a del càlcul multiplicant el resultat per e^{at}).

(2) $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = \left(\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\right)_{t\to t-a} \cdot u(t-a)$ (per calcular $\mathcal{L}^{-1}$ d'una funció multiplicada per e^{-as}, podem treure el e^{-as} fent un shift $t \to t-a$ del resultat i multiplicant per $u(t-a)$.)

Altres propietats de l'anti-transformada

(a) Si volem calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ però ens adonem que $F(s) = \frac{d}{ds}G(s)$, per una funció $G(s)$ més "senzilla que no pas $F(s)$", aleshores:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}G(s)\right] = -t\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$ (Via la transformada de la derivada).

(b) Si volem calcular l'anti-transformada d'un producte de dues funcions, $F(s)\cdot G(s)$, de les quals en sabem calcular l'anti-transformada per separat, aleshores podem "reduir" el càlcul al d'un producte de convolució:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

- Exemples: Calculeu $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ per les funcions següents (Keyword: fraccions simples)

(1) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{C}{s+4}$, per certs $A, B, C \in \mathbb{R}$

Per calcular A, B, C multipliquem per $(s-1)(s+2)(s+4)$ per eliminar denominadors:

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2) \quad [\text{cert } \forall s \in \mathbb{R}]$$

- Fem $s=1 \Rightarrow 1 = A\cdot(1+2)\cdot(1+4) + B\cdot 0 + C\cdot 0 \Rightarrow 1 = 15A \Rightarrow \boxed{A = 1/15}$
- Fem $s=-2 \Rightarrow 1 = A\cdot 0 + B(-2-1)(-2+4) + C\cdot 0 \Rightarrow 1 = -6B \Rightarrow \boxed{B = -1/6}$
- Fem $s=-4 \Rightarrow 1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C(-4-1)\cdot(-4+2) \Rightarrow 1 = 10C \Rightarrow \boxed{C = 1/10}$

Per tant, usant que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$:

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}[1/s-1] - 1/6\,\mathcal{L}^{-1}[1/s+2] + 1/10\,\mathcal{L}^{-1}[1/s+4] = \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}.$

(2) $F(s) = \dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s^3} + \dfrac{D+E\cdot s}{s^2+4}$, per certs $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$.

Multipliquem per $s^3(s^2+4)$ per eliminar denominadors:

$3s - 2 = A\cdot s^2(s^2+4) + B\cdot s\cdot(s^2+4) + C(s^2+4) + (D+E\cdot s)s^3$

Igualem coeficients de $s^0 = 1$ (terme independent), s^1, s^2, s^3 i s^4:

Coeficient de s^0: $-2 = 4C \Rightarrow \boxed{C = -1/2}$ (és com fer $s=0$).

Coeficient de s^1: $3 = 4B \Rightarrow \boxed{B = 3/4}$

Coeficient de s^2: $0 = 4A + C \Rightarrow 4A = -C = 1/2 \Rightarrow \boxed{A = 1/8}$

Coeficient de s^3: $0 = B + D \Rightarrow D = -B \Rightarrow \boxed{D = -3/4}$

Coeficient de s^4: $0 = A + E \Rightarrow E = -A \Rightarrow \boxed{E = -1/8}$

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{8}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[1/s]}_{=1} - \frac{3}{4}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[1/s^2]}_{=t} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[1/s^3]}_{=t^2/2!} - \frac{3}{4}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2^2}\right]}_{=\frac{\sin(2t)}{2}} - \frac{1}{8}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]}_{=\cos(2t)} =$

$= \frac{1}{8} - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}\sin(2t) - \frac{1}{8}\cos(2t)$

19

(3) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$. Em primer lloc, observem que aquí no val plantejar-se cap descomposició en fraccions simples, ja que $F(s)$ ~~ja~~ té forma de fracció simple. Però aquesta anti-transformada no la podem obtenir via les taules (sí, en cas que, enlloc de $(s^2+1)^2$, tinguéssim $(s^2+1)^1$). Ho abordem de dues maneres:

- Opció 1: $F(s) = \dfrac{d}{ds} G(s)$ per una $G(s)$ més senzilla. De fet tenim:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{-1/2}{s^2+1}\right) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = F(s) \Rightarrow \text{Triem } G(s) = \frac{-1/2}{s^2+1}. \text{ Així:}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propietat (a)} \\ \text{diapositiva 19}}}{=} -t\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = -t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/2}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2} t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1^2}\right] = \frac{t}{2}\sin(t).$$

- Opció 2: Via el producte de convolució (propietat (b) diapositiva 19)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = (\sin t) * (\cos t) \overset{\boxed{\text{diapositiva 14}}}{=}$$

$$= \int_0^t \sin(z)\cdot\cos(t-z)\,dz \underset{\uparrow}{=} \int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin(t) + \sin(2z-t)\right] dz = \frac{1}{2}\sin t \int_0^t 1\,dz + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2z-t)\,dz =$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$
$$A \equiv z,\ B \equiv t-z$$

$$= \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2z-t)}{2}\right]_{z=0}^{z=t} = \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{4}\left[-\cos(t) - (-\cos(-t))\right] \overset{\cos(-t)=\cos(t)}{=} \frac{t}{2}\sin t$$

– Aplicació de la transformada de Laplace a la resolució de P.V.I.'s per e.d.o.'s lineals d'ordre n a coeficients constants

Considerem una e.d.o. lineal a coef. consts. d'ordre n de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad (1)$$

on $y = y(t)$ és la funció incògnita, $' = \frac{d}{dt}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ són nombres donats, amb $a_n \neq 0$, i $f(t)$ és una funció donada, definida almenys per $t \geq 0$ i de la qual en sabem calcular $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ la seva transformada de Laplace. Aleshores, si busquem la solució $y(t)$ de (1) que verifica un PVI de la forma: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$, on $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ són constants donades, podem fer-ho així:

Pas 1: Aplicar la transformada de Laplace $\mathcal{L}[\cdot]$ a l'edo (1) i usar l'expressió de $\mathcal{L}[y^{(j)}(t)]$ en termes de $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ i $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(j-1)}$, per obtenir una equació per $Y(s)$.

Pas 2: Aïllar $Y(s)$ la solució d'aquesta nova equació.

Pas 3: Recuperar $y(t)$ la solució del P.V.I. considerat via l'anti-transformada $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$.

- Exemple 1: (Problema 23(b)) Resoleu el P.V.I. següent via transformada de Laplace:

$$y'' - 4 \cdot y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

· Pas 1: Apliquem la transf. de Laplace a l'edo i deduïm una nova equació per $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$:

$$\mathcal{L}[y''(t)] - 4\mathcal{L}[y'(t)] + 4\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[t^3] \quad (2)$$

Ara usem les propietats de la transformada d'una derivada:

$$\mathcal{L}[y'(t)] = s \cdot Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 1$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s \cdot 1 - 0 = s\,Y(s) - s.$$

Així, l'equació (2) esdevé:

$$(s^2 Y(s) - s) - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}. \quad (3)$$

· Pas 2: Aïllem $Y(s)$ de (3)

$$(s^2 - 4s + 4)\,Y(s) = \frac{6}{s^4} + s - 4 = \frac{s^5 - 4s^4 + 6}{s^4}$$

$$Y(s) = \frac{s^5 - 4s^4 + 6}{s^4(s^2 - 4s + 4)}$$

· <u>Pas 3</u>: trobem la solució $y(t)$ del P.V.I via anti-transformada:

$$Y(s) = \frac{s^5-4s^4+6}{s^4(s^2-4s+4)} = \frac{s^5-4s^4+6}{s^4(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s-2} + \frac{F}{(s-2)^2}$$, per certs $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

Eliminem denominadors multiplicant per $s^4(s-2)^2$:

$$s^5-4s^4+6 = As^3(s-2)^2 + Bs^2(s-2)^2 + Cs(s-2)^2 + D(s-2)^2 + Es^4(s-2) + F\cdot s^4$$

. Fem $s=0$: $6 = 4D \Rightarrow \boxed{D=3/2}$. Fem $s=2$: $-26 = 16F \Rightarrow \boxed{F=-13/8}$

• Igualem coef. de s^1: $0 = 4C - 4D \Rightarrow C = D \Rightarrow \boxed{C=3/2}$

• Igualem coef. de s^5: $\boxed{1 = A+E}$

• Igualem coef. de s^4: $-4 = -4A+B-2E+F = -4A+B-2E-13/8 \Rightarrow \boxed{-4A+B-2E = -\frac{19}{8}}$

• Igualem coef. de s^3: $0 = 4A-4B+C = 4A-4B+3/2 \Rightarrow \boxed{A-B=-3/8}$

Toca ara resoldre el sistema de 3 equacions per A, B, E. Fent-ho, s'obté:

$\boxed{A=3/4}$ $\boxed{B=9/8}$ $\boxed{E=1/4}$

Finalment, dona:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3/4}{s} + \frac{9/8}{s^2} + \frac{3/2}{s^3} + \frac{3/2}{s^4} + \frac{1/4}{s-2} - \frac{13/8}{(s-2)^2}\right] = \frac{3}{4} + \frac{9}{8}t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{13}{8}te^{2t}$$

• <u>observació</u>: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ f(s)=\frac{1}{s^2}}}{=} \mathcal{L}^{-1}[F(s-2)] = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}[1/s^2] = e^{2t}\cdot t.$

- Def.: La funció impuls unitari o "funció" delta de Dirac en t_0 és una "funció generalitzada" (una distribució) que denotarem per $\delta(t-t_0)$ i que s'usa per modelar matemàticament un impuls puntual, que només actua en un instant de temps $t=t_0$ concret, i que proporciona un impuls unitari en aquest instant (p. ex., donar un cop de raqueta a una pilota de tènis). Tal "funció" $\delta(t-t_0)$ no pot existir en el sentit d'una funció "clàssica". Però, si existís, ha de verificar la següent propietat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}). \quad \left(\text{En particular, } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt = 1\right)$$

Aquesta propietat ens permet calcular la transformada de Laplace de la delta:

$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)](s) = e^{-s\cdot t_0}$ (que podem afegir a la taula de transformades).

- Exemple 2: (Problema 24) Resoleu el P.V.I. següent via transformada de Laplace:

$$y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + \delta(t-3\pi), \quad y(0)=1, \; y'(0)=0$$

- Pas 1: Apliquem $\mathcal{L}[\cdot]$ a l'edo i obtenim una equació per $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$:

$$\mathcal{L}[y''(t)] + 4\mathcal{L}[y'(t)] + 13\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)] + \mathcal{L}[\delta(t-3\pi)]$$

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}$$

24

Aplicant les condicions inicials $y(0)=1$ & $y'(0)=1$ obtenim l'equació:

$$(s^2 Y(s) - s) + 4(sY(s) - 1) + 13\,Y(s) = e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}$$

• <u>Pas 2</u>: Aillem $Y(s)$:

$$(s^2+4s+13)\,Y(s) = e^{-\pi s} + e^{-3\pi s} + s + 4$$

$$Y(s) = \frac{s+4+e^{-\pi s}+e^{-3\pi s}}{s^2+4s+13}$$

• <u>Pas 3</u>: Calculem la solució $y(t)$ del PVI fent $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

El primer aspecte és tractar de factoritzar el denominador.

$$s^2+4s+13 = 0 \Rightarrow s = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 13}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{-4\cdot 9}}{2} = \underbrace{-2}_{\alpha} \pm \underbrace{3}_{\beta} i$$ Complexes conjugades! No factoritza.

Per tant, per gestionar aquest denominador <u>cal</u> expressar-lo com segueix:

$$s^2+4s+13 = (s-\alpha)^2+\beta^2 = (s+2)^2+3^2$$

Aleshores, veiem 1er. el següent càlcul:

$\boxed{\text{Fem el shift } s+a \to s \text{ per } a=-2, \text{ i multipliquem per } e^{at}}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+4s+13}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right] + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right] = e^{-2t}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right]}_{\cos(3t)} + 2e^{-2t}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3^2}\right]}_{\frac{1}{3}\sin(3t)} =$$

$$= e^{-2t}\cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-2t}\sin(3t).$$

Ara toca fer raonaments anàlegs per la part que porta $e^{-\pi s}$ i $e^{-3\pi s}$ multiplicant. Fem un dels dos i deixem els detalls de l'altre perquè els feu.

L'efecte de cada delta de Dirac en el terme independent de l'edo el veiem en l'aparició d'una funció esglaó $\mathcal{U}$ que s'activa a partir del punt on actua la delta. p. ex.:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+4s+13}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\pi(s+2-2)}}{(s+2)^2+3^2}\right] = e^{6\pi}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\pi(s+2)}}{(s+2)^2+3^2}\right] \underset{\uparrow}{=} e^{6\pi}e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+3^2}\right] =$$

$\boxed{\text{Fem el shift } s+2 \to s \text{ i multipliquem } e^{-2t}}$

$$\underset{\uparrow}{=} e^{6\pi}e^{-2t}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3^2}\right]\right)_{t\to t-3\pi}\cdot\mathcal{U}(t-3\pi) = e^{6\pi}e^{-2t}\left(\frac{1}{3}\sin(3t)\right)_{t\to t-3\pi}\cdot\mathcal{U}(t-3\pi) =$$

$\boxed{\text{usem: } \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = \left(\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)\right)_{t\to t-a}\cdot\mathcal{U}(t-a) \quad \text{Per } a=3\pi}$

$$= \frac{1}{3}e^{6\pi}e^{-2t}\underbrace{\sin(3(t-3\pi))}_{\substack{\shortparallel \\ \sin(3t-9\pi) \\ \shortparallel \\ -\sin(3t)}}\cdot\mathcal{U}(t-3\pi)$$

Repetint el càlcul per $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+13}\right]$ i

Juntant-ho tot, obtenim el resultat final:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+4s+13}\right] + \overbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+13}\right]}^{=\frac{1}{3}e^{2\pi}e^{-2t}\sin(3(t-\pi))\mathcal{U}(t-\pi)} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3\pi s}}{s^2+4s+13}\right] =$$

$$= e^{-2t}\cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-2t}\sin(3t) - \frac{1}{3}e^{2(\pi-t)}\sin(3t)\,\mathcal{U}(t-\pi) - \frac{1}{3}e^{2(3\pi-t)}\sin(3t)\,\mathcal{U}(t-3\pi)$$

Aplicació de la transformada de Laplace al càlcul d'integrals impròpies

Exemple 1: Calculem $I = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-2t} \cos(t)\, dt$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2\cdot t} (t \cdot \cos(t))\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ f(t) = t\cos t \\ s=2}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \left(\mathcal{L}\{t \cos t\}(s)\right)_{|s=2} \underset{\uparrow}{=} -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\{\cos t\}(s)\right)_{|s=2} =$$

propietat derivada d'una transformada

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)_{|s=2} = -\left(\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right)_{|s=2} = \frac{3}{25}.$$

Exemple 2: Calculem $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t}\, dt$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right) dt \underset{\substack{\uparrow \\ f(t) = \frac{\sin t}{t} \\ s=1}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \left(\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s)\right)_{|s=1} \underset{\uparrow}{=} \left(\arctan(1/s)\right)_{|s=1} =$$

transformada ja calculada o taules

$$= \arctan(1) = \pi/4.$$