(26) En cadascun dels casos següents, troben el centre de masses dels sòlid A suposant distribució de masses homogènia.

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

- $CM = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$ per simetria
- $m(A) = \iiint_A \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A \rho_0\,dx\,dy\,dz =$

$$= \rho_0 \text{ Volum}(A) = \rho_0 \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8} = \frac{\pi R^3}{6}\rho_0$$ (octant esferal)

- $\bar{x} = \frac{1}{m(A)} \iiint_A x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{m(A)} \iiint_A x \rho_0\,dx\,dy\,dz =$

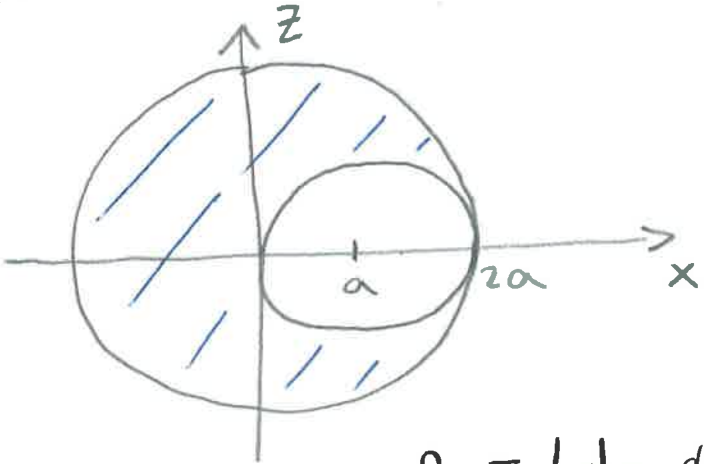
$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Coord. esfèriques} \\ \left.\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}\right\} = A^* \end{array} \right\} = \frac{6}{\pi R^3} \iiint_{A^*} r\cos\varphi\cos\theta\, \underbrace{r^2\cos\varphi}_{\text{Jacobià}}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{6}{\pi R^3} \underbrace{\left(\int_0^R r^3\,dr\right)}_{= R^4/4} \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta\right)}_{= 1} \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi\right)}_{= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi/4} = \frac{3R}{8}$$

(c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2,\ (x-a)^2+y^2+z^2 \geq a^2\}$

- $CM = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, 0, 0)$ per simetria del domini respecte la y i la z.

- A és un domini de revolució entorn de l'eix x, en quant si fem girar un punt (x,y,z) que compleix les desigualtats entorn de l'eix x, llavors $y^2+z^2 = (\text{dist. eix } x)^2$ es manté constant en girar i tots els punts obtinguts en girar l'anterior també compleixen la desigualtat.
- Podem visualitzar A fent girar entorn de l'eix x el domini següent (fem $y=0$)



De fet,

$A = B_1 \setminus B_2$, on:

$B_1 \equiv$ bola de centre $(0,0,0)$, radi $2a$

$B_2 \equiv$ bola de centre $(a,0,0)$ i radi a.

- $$m(A) = \iiint_A \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \rho_0 \text{ Volum }(A) =$$
$$= \rho_0 \left(\text{Volum }(B_1) - \text{Volum }(B_2)\right) = \rho_0 \left[\frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right] =$$
$$= \frac{28}{3}\rho_0 \pi a^3$$

- $$\bar{x} = \frac{1}{m(A)} \iiint_A \rho(x,y,z)\, x\,dx\,dy\,dz = \frac{\rho_0}{m(A)}\left[I_1 - I_2\right], \text{ on:}$$

$$I_j = \iiint_{B_j} x\,dx\,dy\,dz$$

• $I_1 = \iiint_{B_1} x\,dx\,dy\,dz = 0$ per simetria de la bola de centre $(0,0,0)$

• $I_2 = \iiint_{B_2} x\,dx\,dy\,dz$

Usem coord. esfèriques centrades en $(a,0,0)$

$x = a + r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$,

de forma que ara la bola es descriu en termes de (r,θ,φ) com si fos la de centre $(0,0,0)$ i radi a:

$B_2^* = \{0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi/2\}$.

El Jacobià és el mateix que les esfèriques estàndar

$$I_2 = \iiint_{B_2^*} (a + r\cos\theta\cos\varphi)\, r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= a\underbrace{\left(\int_0^a r^2 dr\right)}_{= a^3/3}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{= 2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\right)}_{= 2} + \left(\int_0^a r^3 dr\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)}_{= 0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^4$$

• Així: $\bar{x} = \dfrac{\rho_0}{\frac{28}{3}\rho_0 \pi a^3}\left[0 - \frac{4}{3}\pi a^4\right] = -\dfrac{a}{7}$