(20) Useu coordenades esfèriques per calcular les següents integrals triples.

- Coord. esfèriques: $(x,y,z)=(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi)$

$r\in(0,+\infty)$, $\theta\in(0,2\pi)$, $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $J(r,\theta,\varphi)=r^2\cos\varphi$.

(a) $I=\iiint_B x^4y^2z^3\,dx\,dy\,dz$, $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2\}$

B és la bola de centre $(0,0,0)$ i radi a en $\mathbb{R}^3$. Em esfèriques: $0\le r\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

$$I=\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^9\cos^6\varphi\sin^3\varphi\cos^4\theta\sin^2\theta\,\underbrace{r^2\cos\varphi}_{\text{jacobià}}\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^a r^{11}dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta\,d\theta\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^7\varphi\cdot\sin^3\varphi\,d\varphi=0$$

La raó (sense fer cap càlcul!) és que $\cos^7\varphi\sin^3\varphi$ és una funció senar (si φ canvia de signe la funció també) i llavors $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^7\varphi\cdot\sin^3\varphi\,d\varphi=0$.

(b) $I=\iiint_B z\cdot(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0\}$

El domini B en esfèriques ve donat per:

$x^2+y^2+z^2\le a^2 \Rightarrow r^2\le a^2\Rightarrow\ 0\le r\le a$.

$z\ge 0\Rightarrow 0\le\varphi\le\pi/2$ (latitud positiva)

A més $0\le\theta\le 2\pi$.

$$I=\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r\sin\varphi\cdot r^2\cos^2\varphi\cdot\underbrace{r^2\cos\varphi}_{\text{jacobià}}\,d\varphi\,d\theta\,dr=$$

$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi$

$$=\int_0^a r^5dr\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi\,d\varphi=2\pi\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=a}\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}=$$

$$=2\pi\cdot\frac{a^6}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi a^6}{12}$$

(c) $I=\iiint_B \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq b^2\}$

El domini B en ~~ko~~ fèriques ve donat per: $a\leq r\leq b$, $0\leq\theta\leq 2\pi$,
(domini entre dues esferes concèntriques) $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi/2$.

$$I=\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{r^2\cos\varphi}{(r^2)^{3/2}}\,d\varphi\,d\theta\,dr=\int_a^b\frac{dr}{r}\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=\left[\ln r\right]_{r=a}^{r=b}\cdot 2\pi\cdot\left[\sin\varphi\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2}=4\pi(\ln b-\ln a)=4\pi\ln(b/a).$$

(d) $I=\iiint_B\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$, B el domini de l'apartat anterior.

$$I=\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}r\,e^{-r^2}r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr=2\pi\int_a^b r^3e^{-r^2}dr\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}(r^2+1)\right]_{r=a}^{r=b}\cdot\left[\sin\varphi\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2}=$$

$$=2\pi\left\{e^{-a^2}(a^2+1)-e^{-b^2}(b^2+1)\right\}$$

on hem usant:

$$\int r^3e^{-r^2}dr\underset{\uparrow}{=}-\frac{r^2}{2}e^{-r^2}+\int re^{-r^2}dr=-\frac{r^2}{2}e^{-r^2}-\frac{1}{2}e^{-r^2}$$

Parts $\left\{\begin{array}{l}u=r^2\rightarrow du=2r\,dr\\ dv=r\,e^{-r^2}dr\rightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-r^2}\end{array}\right\}$