(14) Per a les regions de $\mathbb{R}^3$ indicades, escriviu la integral triple $I = \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ en termes d'integrals iterades preses en diferents ordres.

(a) A tetraedre limitat pels plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+4z=12$.

És clar $x,y,z \geq 0$ en A i per tant el valor màxim de x correspon a $y=z=0$, això és, $2x=12 \Rightarrow x=6$. Així $x \in [0,6]$.

Si fixem el valor de x, el valor màxim de y correspon a $z=0$ i per tant $y \in [0, 4-\frac{2}{3}x]$. Finalment, si fixem x i y, llavors z és mou entre $z=0$ i $z=\dfrac{12-2x-3y}{4}$.

Així: $$I = \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \int_0^{3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Ídem: $$I = \int_0^3 \int_0^{4-\frac{4}{3}z} \int_0^{6-\frac{3}{2}y-2z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

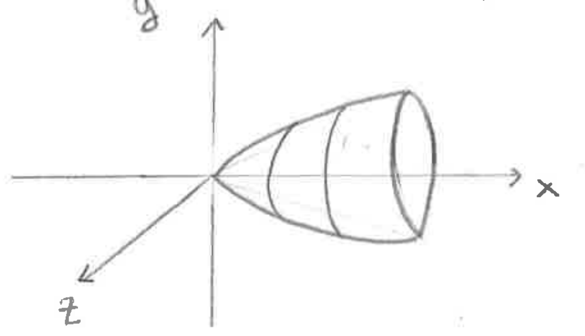
(b) A interior de l'el·lipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

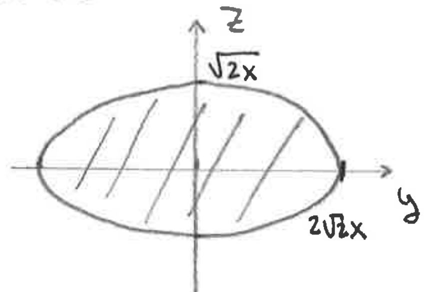
$$I = \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

(c) A cos limitat per les superfícies $y^2+2z^2=4x$, $x=2$.

Perquè la condició $y^2+2z^2=4x$ límiti punts cal $x \geq 0$. Llavors $x \in [0,2]$. Fixat x, $y^2+2z^2=4x$ és una el·lipse on podem aïllar y o z en termes de l'altre variable.

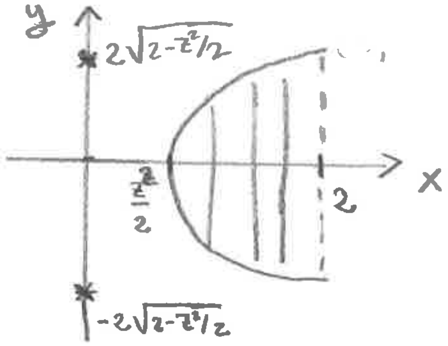
P. ex. $$I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \int_{-\sqrt{4x-2z^2}}^{\sqrt{4x-2z^2}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$





Secció $x = \text{const.}$ Àrea limitada per l'el·lipse $$\frac{y^2}{(2\sqrt{2x})^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{2x})^2}=1$$

Si, p. ex., fem secció $z =$ Const. obtenim la regió tancada per la paràbola $x = y^2/4 + z^2/2$ i $x = 2$.



D'aquí és clar que $z^2/2 \leq 2 \Rightarrow z \in [-2,2]$

Així:

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{z^2/2}^{2} \int_{-\sqrt{4x-2z^2}}^{\sqrt{4x-2z^2}} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz = \int_{-2}^{2} \int_{-2\sqrt{2-z^2/2}}^{2\sqrt{2-z^2/2}} \int_{y^2/4 + z^2/2}^{2} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$