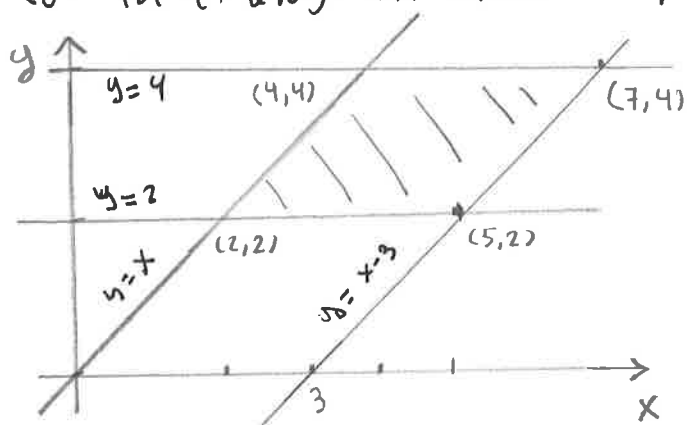


8) Per a les regions  $A \subset \mathbb{R}^2$  indicades, escriu la integral doble  $\iint_A f(x,y) dx dy$  en termes de integrals iterades poses en diferents ordres,  $\int (\int f dx) dy$  i  $\int (\int f dy) dx$ , donant quins són els extrems d'integració per a  $x$  i  $y$  en cada cas

(b) Paralelogram limitat per les rectes  $y = x$ ,  $y = x - 3$ ,  $y = 2$ ,  $y = 4$ .



\* Si parametritzem el domini respecte  $x$  tenim:

$$\text{si } x \in [2, 4] \Rightarrow 2 \leq y \leq x$$

$$\text{si } x \in [4, 5] \Rightarrow 2 \leq y \leq 4$$

$$\text{si } x \in [5, 7] \Rightarrow x - 3 \leq y \leq 4$$

$$\iint_A f dx dy = \int_2^4 \left( \int_2^x f dy \right) dx + \int_4^5 \left( \int_2^4 f dy \right) dx + \int_5^7 \left( \int_{x-3}^4 f dy \right) dx$$

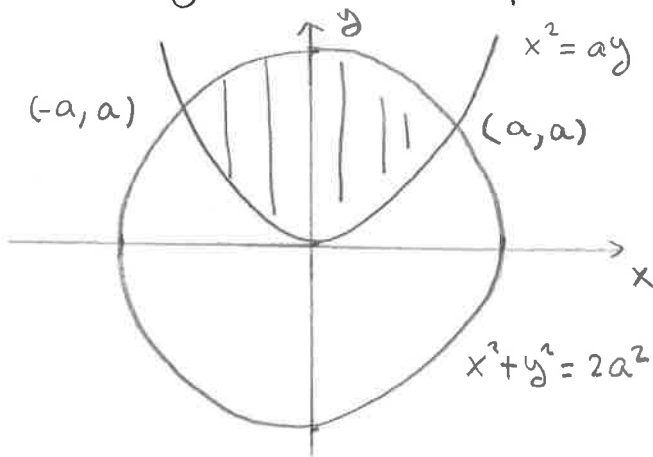
\* Si parametritzem el domini resp.  $y$  tenim:

$$\text{si } y \in [2, 4] \Rightarrow y \leq x \leq y + 3$$

(observem que  $y = x - 3$   
és també  $x = y + 3$ )

$$\iint_A f dx dy = \int_2^4 \left( \int_y^{y+3} f dx \right) dy$$

(c) A regió limitada per les corbes  $x^2 + y^2 = 2a^2$ ,  $x^2 = ay$  ( $y \geq 0$ ,  $a > 0$ )



observem que  $x^2 = ay$  és la parabola  $y = x^2/a$  i  $x^2 + y^2 = 2a^2$ , la circumferència de centre  $(0,0)$  i radi  $\sqrt{2}a$ .

Punts de tall?  $x^2 + y^2 = 2a^2 \Rightarrow ay + y^2 = 2a^2 \Rightarrow y^2 + ay - 2a^2 = 0$   
 $x^2 = ay$

$$\Rightarrow y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{-a \pm 3a}{2} = \begin{cases} a \\ -2a \end{cases}$$

$y = a \Rightarrow x = \pm a$ ;  $y = -2a \Rightarrow x^2 = -2a^2$  no té solució per  $x$ .

\* Si parametritzem el domini resp. de  $x$ :

$$x \in [-a, a] \Rightarrow x^2/a \leq y \leq \sqrt{2a^2 - x^2}$$

$$\iint_A f dx dy = \int_{-a}^a \left( \int_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2 - x^2}} f dy \right) dx.$$

\* Si parametritzem el domini resp. de  $y$ :

$$\text{si } y \in [0, a] \Rightarrow -\sqrt{ay} \leq x \leq \sqrt{ay}$$

$$\text{si } y \in [a, \sqrt{2}a] \Rightarrow -\sqrt{2a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{2a^2 - y^2}$$

$$\iint_A f dx dy = \int_0^a \left( \int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f dy \right) dx + \int_a^{\sqrt{2}a} \left( \int_{-\sqrt{2a^2 - y^2}}^{\sqrt{2a^2 - y^2}} f dy \right) dx.$$