(3) Apliquem el principi de Cavalieri per calcular els següents volums a partir de l'àrea de seccions amb plans paral·lels als plans coordenats (triades de forma adequada).

(a) Volum envoltat per l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Recordem: L'àrea el·lipse $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ és πAB.

Si fem secció $z=$ Const. amb $z\in[-c,c]$ obtenim:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A(z)^2}+\frac{y^2}{B(z)^2}=1$ on $A(z)=a\sqrt{1-z^2/c^2}$, $B(z)=b\sqrt{1-z^2/c^2}$

Àrea de l'el·lipse secció: $\text{Àrea}(z)=\pi A(z)B(z)=\pi ab(1-z^2/c^2)$.

$\text{Volum}=\int_{-c}^{c}\text{Àrea}(z)\,dz=\pi ab\int_{-c}^{c}(1-z^2/c^2)\,dz=2\pi ab\left[z-\frac{z^3}{3c^2}\right]_{z=-c}^{z=c}=2\pi ab\left(c-\frac{c}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc$

(b) Volum envoltat pel con invertit de base el·líptica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$, amb $0\le z\le h$.

Si fem secció $z=$ Const. amb $z\in[0,h]$, obtenim: $\frac{x^2}{A(z)^2}+\frac{y^2}{B(z)^2}=1$

on $A(z)=az$ i $B(z)=bz$.

Àrea de l'el·lipse secció: $\text{Àrea}(z)=\pi A(z)B(z)=ab z^2$.

$\text{Volum}=\int_0^h\text{Àrea}(z)\,dz=\int_0^h ab z^2\,dz=\left[\frac{\pi ab z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=h}=\pi\frac{ab h^3}{3}$.

(c) Volum de la piràmide de base rectangular de costats a,b i alçada h.

Si fem secció $z=$ Const. amb $z\in[0,h]$, obtenim un rectangle de costats $a(z)$ i $b(z)$ que són funció lineal de z i t.q. $a(0)=a$, $b(0)=b$ i $a(h)=b(h)=0$. Per tant $a(z)=a(h-z)/h$, $b(z)=b(h-z)/h$.

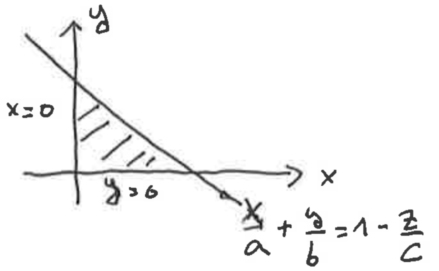
Per tant, l'àrea de la secció és: $\text{Àrea}(z)=a(z)b(z)=\frac{ab}{h^2}(h-z)^2$.

$\text{Volum}=\int_0^h\text{Àrea}(z)\,dz=\int_0^h\frac{ab}{h^2}(h-z)^2\,dz=\left[-\frac{ab}{h^2}\frac{(h-z)^3}{3}\right]_{z=0}^{z=h}=\frac{abh}{3}$.

(d) Volum del tetraedre limitat pels plans $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a,b,c>0)$.

Un tetraedre és una figura geomètrica amb 4 cares, on cada cara és un triangle. Si fem secció $z=\text{const.}$ obtenim que els costats del triangle són $x=0,\ y=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-z/c$:

secció



Per tant és un triangle rectangle de vèrtexs $(0,0),\ (a(1-z/c),0),\ (0,b(1-z/c))$

i $\text{Àrea}(z)=\frac{1}{2}ab(1-z/c)^2$, on $z\in[0,c]$, ja que un dels costats del Tetraedre és $z=0$ i si volem que la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{z}{c}$ no col·lapsi a $x=y=0$ cal $z<c$. Finalment:

$$\text{Volum}=\int_0^c \text{Àrea}(z)\,dz=\frac{1}{2}ab\int_0^c(1-z/c)^2dz=\left[-\frac{abc}{6}\left(1-\frac{z}{c}\right)^3\right]_{z=0}^{z=c}=\frac{abc}{6}.$$

(e) Volum envoltat pel casquet esfèric determinat per l'esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ i la condició $R-h\leq z\leq R$.

Si fem secció $z=\text{const.}$, obtenim la circumferència d'equació $x^2+y^2=R^2-z^2=(\sqrt{R^2-z^2})^2$, que té $\text{Àrea}(z)=\pi(R^2-z^2)$.

Per tant:

$$\text{Volum}=\int_{R-h}^{R}\text{Àrea}(z)\,dz=\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-z^2)\,dz=\pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{z=R-h}^{z=R}=$$

$$=\pi\left(R^3-R^3/3-R^2(R-h)+(R-h)^3/3\right)=$$

$$=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}-R^3+R^2h+\frac{R^3-3R^2h+3Rh^2-h^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}(3Rh^2-h^3)=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$$