Càlcul 2: Integració de Funcions de Vàries Variables

Jordi Villanueva

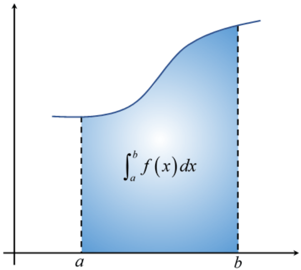
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

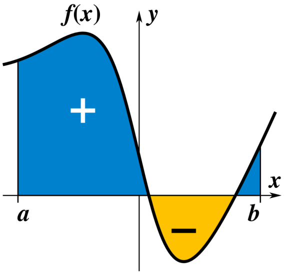
2 de Febrer de 2024

Definició (Integral definida de funcions d'una variable)

Donada una funció real de variable real $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ *, la seva integral definida* $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *és el valor de l'àrea amb signe entre la gràfica de la funció* $y = f(x)$ *en l'interval* $x \in [a,b]$ *i l'eix* x *.*

- *Si la funció és positiva,* $f(x) \geq 0$ *, el valor de* I *és pròpiament el de l'àrea limitada per l'eix x i la gràfica.*
- *Si la funció té canvis de signe, la part de l'àrea que queda per sota l'eix* x *l'hem de comptar com a negativa en calcular* I *.*





- La construcció de la integral definida d'una funció d'una variable és pot fer usant sumes de Riemann (que heu vist a Càlcul 1 i que trobareu esquematitzades als apunts d'integració de Càlcul 2).
- No tota funció $f(x)$ d'una variable és integrable en el sentit de Riemann. Hi ha ha funcions a les quals les sumes de Riemann no permeten associar-li el valor de la seva integral definida.
- Tota funció $f : [a,b] \subset \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x)}{\mathbb{R}}$, acotada i que sigui o bé contínua en $[a,b]$ o bé que el conjunt de les seves discontinuïtats sigui de longitud zero, és integrable en $[a,b]$. Per exemple, si $f(x)$ és contínua $[a,b]$ excepte en un nombre finit de discontinuïtats.
- **Teorema Fonamental del càlcul Regla de Barrow.**
Si $f : [a,b] \subset \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x)}{\mathbb{R}}$ és contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ n'es una primitiva qualsevol (això és: $F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$), llavors:

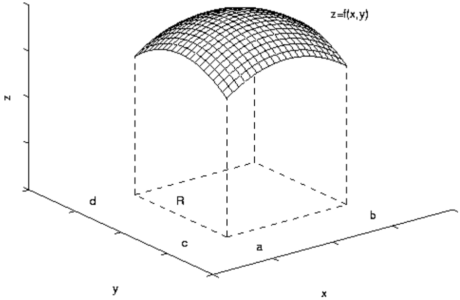
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Definició (Integral doble funcions de 2 variables en rectangles)

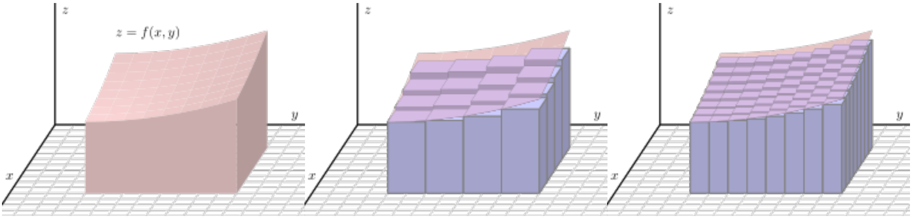
Donada una funció real de dues variables, $f : R \subset \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x,y)}{\mathbb{R}}$ *, on* $R = [a,b] \times [c,d]$ *és un rectangle a* $\mathbb{R}^2$ *i* $f(x,y) \geq 0$ *,* $\forall (x,y) \in R$ *, llavors la seva integral doble en* R *:*

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

és el valor del volum a $\mathbb{R}^3$ *tancat per la gràfica de la funció* $z = f(x,y)$ *en el rectangle* R *i el pla* x, y *.*



La construcció de $I = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ en $R = [a,b] \times [c,d]$ és pot fer a partir de sumes de Riemann detalls als apunts de l'assignatura): Trieu $m \geq 1$ i trenqueu cada interval $[a,b]$, $[c,d]$ en m sub-intervals del mateix tamany. Fent producte de cada sub-interval de $[a,b]$ amb cada sub-interval de $[c,d]$, trenquem R com unió de m^2 rectangles del mateix tamany. El valor de la integral doble I s'aproxima per sota fent la suma dels volums dels m^2 paral·lepípeds que tenen base en el pla x, y un d'aquests sub-rectangles i altura per sota de la gràfica de $z = f(x,y)$ en el sub-rectangle. En les figures visualitzeu aquestes **sumes inferiors de Riemann** $s_m(f,R)$ per $m = 4$ i $m = 8$. Ídem per les **sumes superiors de Riemann** $S_m(R,f)$.



Definició (Funció de 2 variables integrable en un rectangle R)

Direm que $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *és integrable en* R *si el límit* $m \to \infty$ *de les sumes superiors i inferios de Riemann de* f *en* R *existeix i és coincident* $= I$. *El valor* I *defineix la integral doble de* f *en* R*:*

$$\exists I = \lim_{m\to\infty} s_m(f,R) = \lim_{m\to\infty} S_m(f,R) \implies \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = I.$$

Comentari

- *La mateixa construcció de la integral doble aplica també si la funció* $f(x,y)$ *té canvis de signe en el rectangle* R. *Ara la part del volum que correspon a* $f(x,y) < 0$ *compta com negativa.*
- *Si* $A \subset \mathbb{R}^2$ *domini acotat qualsevol i* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *triem* R *un rectangle tal que* $A \subset R$ *i extenem* $f(x,y)$ *a tot* R *fent:*

  $$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & si\ (x,y) \in A \\ 0, & si\ (x,y) \in R \setminus A \end{cases}$$ *Llavors, podem definir:*

  $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy\,.$$

  (El volum de f *sobre* A *és el mateix que el de* $\widetilde{f}$ *sobre* R*.)*

Definició (Àrea d'un subconjunt acotat $A \subset \mathbb{R}^2$)

$$\text{Àrea}(A) := \iint_A 1\, dx\, dy.$$

Definició (Domini elemental de $\mathbb{R}^2$)

Direm que $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini elemental del pla si D és acotat i la seva frontera és unió d'un nombre finit de corbes contínues.

Teorema (Criteri d'integrabilitat en dominis elementals de $\mathbb{R}^2$)

Sigui $f : D \subset \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \underset{\mapsto}{\to} \underset{f(x,y)}{\mathbb{R}}$, on $D \subset \mathbb{R}^2$ domini elemental i f acotada en D. Llavors, si f és contínua en D o contínua excepte un conjunt de punts $A \subset D$ que té àrea zero, llavors f és integrable en D.

Comentari

- *Exemples de dominis elementals de $\mathbb{R}^2$ són: un rectangle, un triangle, un disc, un anell, etcètera.*
- *L'àrea del conjunt de $\mathbb{R}^2$ definit per un punt o una corba és zero. L'àrea de la unió finita de conjunts d'àrea zero és zero.*

Integració de funcions de tres variables (I)

- Podem extendre la construcció de la integral doble d'una funció de dos variables definida en un rectangle via sumes de Riemann a la integral triple d'una funció $g : P \subset \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x,y,z)}{\mathbb{R}}$, acotada, on $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ és un paral·lepíped.
- La integral triple de g en R dóna el volum $4 - D$ amb signe sota la gràfica de g.
- Si $g : A \subset \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{g(x,y,z)}{\mathbb{R}}$ és una funció acotada definida en un subconjunt $A \subset \mathbb{R}^3$ acotat, podem formalitzar també la definicio de la integral triple de g en A:

$$\iiint_A g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

- En particular:

$$\text{Volum}(A) := \iiint_A 1\, dx\, dy\, dz.$$

Integració de funcions de tres variables (I)

- Els dominis elementals de $D \subset \mathbb{R}^3$ són aquells conjunts acotats tals que la seva frontera és unió finita de superfícies contínues.
- Si $g : D \subset \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \underset{\mapsto}{\to} \underset{g(x,y,z)}{\mathbb{R}}$, on $D \subset \mathbb{R}^3$ és un domini elemental, i g és contínua en D o bé contínua excepte un conjunt de punts $A \subset D$ que té volum zero, llavors g és integrable en D.
- Exemples de dominis elementals de $\mathbb{R}^3$ són un paral·lepíped o una bola tancada.
- El volum del conjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per un punt, una corba o una superfície és zero. El volum de la unió finita de conjunts de volum zero és zero.
- Anàlogament, podem extendre la noció d'integral a funcions de n variables.

Propietats de la integral

$D \subset \mathbb{R}^n$ domini elemental i $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcions integrables en D, on $n \in \{2, 3\}$. Denotarem per $\int_D f$ la corresponent integral doble o triple de f en D, segons el cas. Llavors:

1. $\int_D (a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \int_D f + b \cdot \int_D g$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (linealitat).
2. $\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$.
3. Si D és unió disjunta de dos dominis elementals $D = D_1 \cup D_2$, llavors $\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$.
4. **Teorema del Valor Mig per Integrals.** Si f és contínua en D, llavors $\exists p_0 \in D$ tal que: $\displaystyle\int_D f = f(p_0) \cdot |D|$, on $|D|$ denota:

   $|D| = \text{Àrea}(D)$, si $n = 2$; $\quad |D| = \text{Volum}(D)$, si $n = 3$.

   El teorema del valor mig per integrals s'usa per acotar el tamany de l'integral. Considerem per exemple el cas $n = 2$. Si trobem constants m, M tals que $m \leq f(p) \leq M$, $\forall p \in D$, llavors:

$$m \cdot \text{Àrea}(D) \leq \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leq M \cdot \text{Àrea}(D).$$

- Exemple: Sigui $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$ (bola tancada de centre $(0,0)$ i radi 2) i $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Apliquem el teorema del Valor mig per integrals per acotar el valor de

$$I = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

El teorema ens diu que existeix $(x_0,y_0) \in D$ tal que

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\cdot \text{Àrea}(D) \Rightarrow \iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = e^{x_0^2+y_0^2}\cdot \pi \cdot 2^2$$

Com no sabem calcular (x_0,y_0), acotem el tamany de $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en D. Concretament:

$$0 \leq x^2+y^2 \leq 4 \text{ en } D \Rightarrow m = 1 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^4 = M \text{ en } D.$$

Per tant:

$$\boxed{\underbrace{4\pi}_{m\cdot \text{Àrea}(D)} \leq \iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \leq \underbrace{4\pi e^4}_{M\cdot \text{Àrea}(D)}}$$

Principi de Cavalieri pel càlcul de volums de dominis de $\mathbb{R}^3$

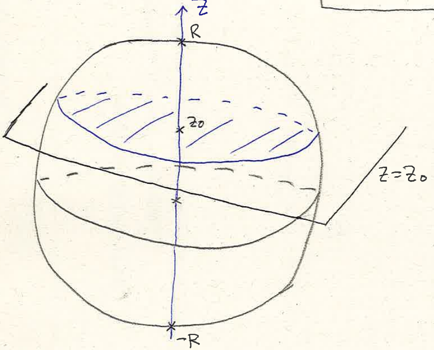
Sigui $D \subset \mathbb{R}^3$ un domini elemental. Suposem que, per exemple, si $(x,y,z) \in D$ llavors $x \in [a,b]$. Denotem per $A(x_0)$ l'àrea de la regió plana determinada per la secció de D pel pla $x = x_0$. Aleshores:

$$\boxed{\text{Volum}(D) = \int_a^b A(x)\,dx}$$

(El mateix resultat és vàlid si fem seccions per plans de la forma $y = y_0$ ó $z = z_0$).

- En moltíssims exemples, el principi de Cavalieri esdevé la forma més simple d'abordar el càlcul del volum d'un domini de $\mathbb{R}^3$. Cal vigilar però respecte de quins plans fem les seccions, ja que segons com les triem els càlculs poden ser més o menys simples o fins i tot abordables o inabordables.

- *Exemple*: Usem el principi de Cavalieri per calcular el volum de la bola de radi R: $\boxed{D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}}$



- Si tallem D amb un pla de la forma $z = \text{const.}$, amb $z \in [-R, R]$ obtenim un disc pla de radi $\sqrt{R^2-z^2}$:

$$D: x^2+y^2+z^2 \le R^2$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{x^2+y^2 \le R^2-z^2 = \left(\sqrt{R^2-z^2}\right)^2}$$

Si fem $z = \text{const.}$, els valors de (x,y) que determina aquesta condició són els d'un disc.

- Per tant, l'àrea $A(z)$ de la secció de D amb $z = \text{const.}$ és:

$$A(z) = \pi\left(\sqrt{R^2-z^2}\right)^2 = \pi(R^2-z^2).$$

- Pel principi de Cavalieri, el volum de D és:

$$\text{Volum}(D) = \int_{-R}^{R} A(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \pi\cdot(R^2-z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-R}^{z=R} = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

- Exemple: Idem pel volum de l'el·lipsoide $\boxed{D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}}$ on $a,b,c>0$.

- Si fem secció de D amb el pla $z=\text{const.}$, $z\in[-c,c]$, obtenim una el·lipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A(z)^2}+\frac{y^2}{B(z)^2}\le 1 \quad \text{on} \quad A(z)=a\sqrt{1-z^2/c^2}\,,\ B(z)=b\sqrt{1-z^2/c^2}$$

- L'àrea tancada per l'el·lipse $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ és $\pi\cdot A\cdot B$.
- L'àrea de la secció de D pel pla $z=\text{const.}$ és: $\text{Àrea}(z)=\pi A(z)B(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$
- Pel principi de Cavalieri, el volum de D és:

$$\text{Volum}(D)=\int_{-c}^{c}\text{Àrea}(z)\,dz=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\pi ab\left[z-\frac{z^3}{3c^2}\right]_{z=-c}^{z=c}=2\pi ab\left[c-\frac{c}{3}\right]=\frac{4}{3}\pi abc$$

- <u>Exemple</u>: Ídem pel volum de la piràmide regular D de base rectangular de costats a, b i altura h.

- Si fem seccions de D per plans de la forma $z = \text{const}$, $z \in [0, h]$, obtenim rectangles de costats $A(z), B(z)$ que anem a usar (sense fer tots els detalls) que són funcions lineals de z. Així, com $A(0) = a$, $A(h) = 0$, $B(0) = b$, $B(h) = 0$, obtenim: $A(z) = \frac{a}{h}(h-z)$, $B(z) = \frac{b}{h}(h-z)$

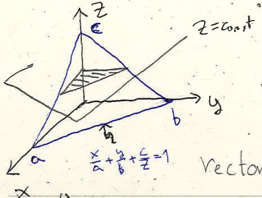
- Per tant, l'àrea de la secció de D pel plà $z = \text{const}$ és:

$$\text{Àrea}(z) = A(z) \cdot B(z) = \frac{ab}{h^2}(h-z)^2.$$

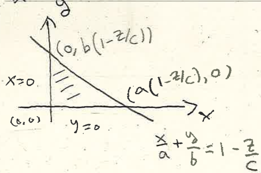
- Pel principi de Cavalieri:

$$\text{Volum}(D) = \int_0^h \text{Àrea}(z)\, dz = \frac{ab}{h^2}\int_0^h (h-z)^2 dz = \frac{ab}{h^2}\left[-\frac{(h-z)^3}{3}\right]_{z=0}^{z=h} = \frac{abh}{3}.$$

- <u>Exemple</u>: Ídem pel volum del tetraedro D limitat pels plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.



- Un tetraedre és una figura geomètrica de $\mathbb{R}^3$ que té 4 cares triangulars.
- Si fem seccions de D amb plans de la forma $z=\text{const}$, $z\in[0,c]$, obtenim un triangle rectangle de vèrtexs en $(0,0)$, $\left(a\left(1-\frac{z}{c}\right),0\right)$, $\left(0,b\left(1-\frac{z}{c}\right)\right)$



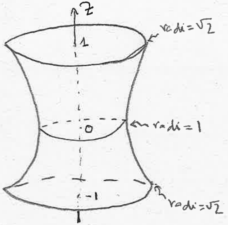
que té àrea:

$$A(z)=\frac{1}{2}ab\left(1-\frac{z}{c}\right)^2$$

- Pel principi de Cavalieri:

$$\text{Volum}(D)=\int_0^c A(z)\,dz=\frac{ab}{2}\int_0^c\left(1-\frac{z}{c}\right)^2 dz=\frac{ab}{2}\left[\frac{-c}{3}\left(1-\frac{z}{c}\right)^3\right]_{z=0}^{z=c}=\frac{abc}{6}$$

• **Exemple**: Ídem pel volum del domini D de revolució entorn de l'eix Z



definit per:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in[-1,1],\ x^2+y^2\leq 1+z^2\}$$

• observem que $x^2+y^2=\left[\text{dist}\left((x,y,z),\text{eix } Z\right)\right]^2$. Per tant si un punt $(x,y,z)\in D$ llavors tots els que estan a la mateixa distància de l'eix Z que ell també són de D. Per això és un domini de revolució entorn de l'eix Z.

• Si fem secció de D pel pla $z=\text{const}$, $z\in[-1,1]$, obtenim un disc de radi $r(z)=\sqrt{1+z^2}$: $x^2+y^2\leq 1+z^2 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq\left(\sqrt{1+z^2}\right)^2$.

• L'àrea d'aquest disc secció és $A(z)=\pi\cdot r(z)^2=\pi(1+z^2)$.

• Pel principi de Cavalieri:

$$\text{Volum}(D)=\int_{-1}^{1}A(z)\,dz=\pi\int_{-1}^{1}(1+z^2)\,dz=\pi\left[z+\frac{z^3}{3}\right]_{z=-1}^{z=1}=\frac{8\pi}{3}.$$

Sigui $f(x,y) \geq 0$ funció integrable en el rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$. Sigui D el domini de $\mathbb{R}^3$ que queda sota la gràfica $z = f(x,y)$ en R:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in [a,b] \times [c,d]\,,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

Calculem Volum(D) via el principi de Cavalieri, fent seccions de D per plans de la forma $x = \text{const.}$, amb $x \in [a,b]$. En la figura, la tapa del domini blau és la gràfica $z = f(x,y)$ i C denota una d'aquestes seccions concretes.

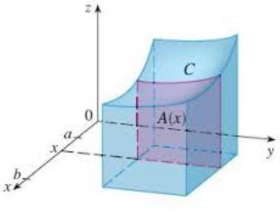


FIGURE 1

L'àrea $A(x)$ d'aquesta secció de D és: $\boxed{A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy}$.

Usant que $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, el principi de Cavalieri ens diu:

$$\text{Volum}(D) = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx.$$

Si refem el càlcul fent seccions de D per plans $y = \text{const.}$, amb $y \in [c,d]$, obtenim l'expressió:

$$\text{Volum}(D) = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy.$$

Usant que $\text{Volum}(D)$ és la integral doble de $f(x,y)$ en el rectangle R:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx.}$$

Les integrals $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy$ i $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx$ són les **integrals iterades** de f en R i el resultat el **Teorema de Fubini**.

·**Teorema** (de Fubini per funcions de dues variables en un rectangle)

$$f: R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \; R = [a,b]\times[c,d], \; f \text{ contínua en } R.$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

Aleshores, existeixen les integrals iterades de f en R i verifiquen:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}$$

· **Corol·lari**.

Si la funció $f(x,y)$ és una funció producte, de la forma

$$f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$$

llavors:

$$\iint_R g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy \right).$$

Exemple: $f(x,y) = x\cos(xy)$, $R = [0,\pi/2]\times[0,1]$

$$\iint_R x\cos(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 x\cos(xy)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi/2} x\left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin(x)}{x} - 0\right)dx = \int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = -\cos(\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = 1$$

- observeu que $\int \cos(xy)\,dy = \frac{\sin(xy)}{x}$ vol dir que si derivem $\frac{\sin(xy)}{x}$ respecte de y, obtenim $\cos(xy)$ [$\frac{\sin(xy)}{x}$ és primitiva de $\cos(xy)$ respecte de y]
- Hi ha també l'opció d'abordar el càlcul via l'altra integral iterada

$$\iint_R x\cos(xy)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dx\right)dy$$

Però el càlcul de la primitiva (resp. de x) $\int x\cos(xy)\,dx$ ens obliga a integrar per parts.

· Exemple: $f(x,y) = x \cdot y^2$, $R = [1,2] \times [1,3]$

$$\iint_{[1,2]\times[1,3]} x \cdot y^2 \, dx\, dy = \left(\int_1^2 x\, dx\right) \cdot \left(\int_1^3 y^2 dy\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^{y=3} = \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{26}{3} = 13$$

- Comentari: Si $f(x,y)$ no és contínua en R, llavors ens podem trobar amb el cas en que alguna o cap de les dues integrals iterades de $f(x,y)$ en R existeixin. El que sí és cert, és que si f és integrable en R i existeix almenys una de les dues integrals iterades, aquesta dona el valor de $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

Criteri de no integrabilitat de $f(x,y)$ en R

Sí és el cas que les dues integrals iterades de $f(x,y)$ en R existeixen però donen valors diferents, llavor f no és integrable en R. Atenció: Si una integral iterada existeix però l'altra no, llavors no podem concloure res!

- <u>Exemple</u>: $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, $R=[0,1]\times[0,1]$.

Anem a veure que les integrals iterades de f en R difereixen:

- $\displaystyle\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = \int\left(\frac{x+y}{(x+y)^3} - \frac{2y}{(x+y)^3}\right)dx = \int \frac{dx}{(x+y)^2} - 2y\int\frac{dx}{(x+y)^3} = \int (x+y)^{-2}dx - 2y\int(x+y)^{-3}dx =$

$$= \frac{(x+y)^{-1}}{-1} - 2y\left(\frac{(x+y)^{-2}}{-2}\right) = -\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2} - \underbrace{\left(-\frac{1}{y}+\frac{y}{y^2}\right)}_{=0} = \frac{-1}{(1+y)^2} = -(1+y)^{-2}$

Per tant:

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right)dy = \int_0^1 -(1+y)^{-2}\,dy = \left[(1+y)^{-1}\right]_{y=0}^{y=1} = \left[\frac{1}{1+y}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

- Per simetria: $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)dx = \frac{1}{2}$

- Per tant, integrals iterades diferents $\Rightarrow$ f no és integrable en R.

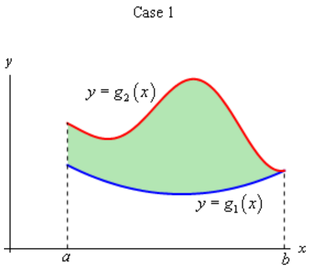
Definició (Dominis x-elementals i y-elementals del pla)

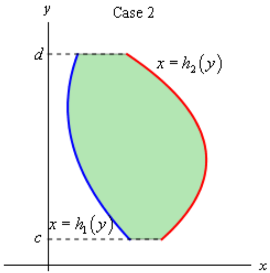
• $D \subset \mathbb{R}^2$ *és un domini* x*-elemental si està limitat per les gràfiques de dues funcions* $y = g_1(x)$ *i* $y = g_2(x)$ *(vegeu la figura del* Case 1*):*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [a, b], \, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

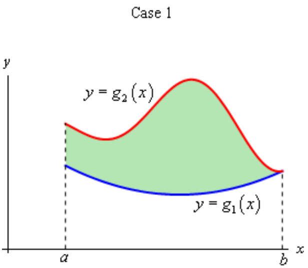
• $D \subset \mathbb{R}^2$ *és un domini* y*-elemental si està limitat per les gràfiques de dues funcions* $x = h_1(y)$ *i* $x = h_2(y)$ *(vegeu la figura del* Case 2*):*

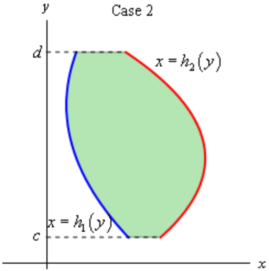
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \in [c, d], \, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$





Integrals iterades en dominis x i y-elementals





- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ (x-elemental):

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ (y-elemental):

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

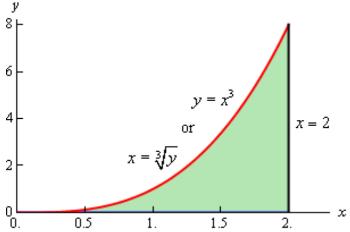
Comentari

- *Quan calculem la integral doble de* $f(x,y)$ *en un domini* $D \subset \mathbb{R}^2$ *que és o bé* x*-elemental o bé* y*-elemental via integrals iterades, l'ordre d'integració (primer respecte de* x *i després respecte de* y *o viceversa) el fixa el tipus de domini que sigui* D*.*
- *No pas tot domini* $D \subset \mathbb{R}^2$ *és o bé* x*-elemental o* y*-elemental, però molts sí que ho són.*
- *Si el domini* $D \subset \mathbb{R}^2$ *és simultàniament* x *i* y*-elemental, llavors podem calcular la integral doble de* $f(x,y)$ *en* D *via qualsevol integral iterada. (Una bona idea pot ser mirar si és més fàcil calcular una primitiva de* $f(x,y)$ *respecte de* x *o respecte de* y*).*
- *Si* $D \subset \mathbb{R}^2$ *no és ni* x*-elemental ni* y*-elemental, llavors sempre el podem trencar com unió de dos o més dominis del pla que, separadament, són o bé* x*-elementals o* y*-elementals. La integral doble de* $f(x,y)$ *en* D *és doncs la suma de les integrals de* $f(x,y)$ *en cada domini de la partició.*

Exemple

Per la integral doble $I = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ *, formalitzeu-ne les dues integrals iterades i calculeu el valor de* I *, on:* $f(x,y) = \sqrt{x^4+1}$ *, i*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le x^3\}.$$



La definció de D en el dona com a domini x-elemental. Per tant:

$$I = \iint_D \sqrt{x^4+1}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\, dy \right) dx.$$

Per tant, usant que $4\,x^3$ és la derivada de x^4+1:

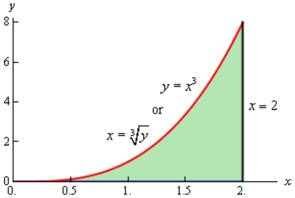
$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}\,dy \right)\,dx = \int_0^2 \left[y\,\sqrt{x^4+1} \right]_{y=0}^{y=x^3}\,dx$$

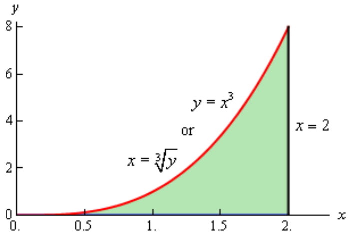
$$= \int_0^2 x^3\,(x^4+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 4\,x^3\,(x^4+1)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(x^4+1)^{3/2}}{3/2} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{4}\left(\frac{17^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{3/2}}{3/2} \right) = \frac{1}{6}\,(17^{3/2}-1).$$

Descriure D com domini y-elemental requereix expressar la corba $y = x^3$ no com y funció de x, sinó com x funció de y:

$$y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}.$$





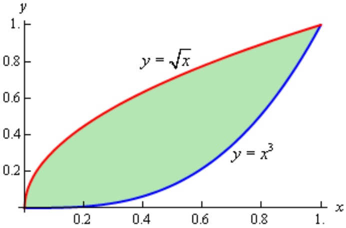
En D tenim $0 \le y \le 8$ i, per a cada valor de y en aquest rang, la x és mou entre $\sqrt[3]{y} \le x \le 2$. Per tant:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 8,\ \sqrt[3]{y} \le x \le 2\},$$
$$I = \iint_D \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy.$$

Però, com no sabem calcular una primitiva de $\sqrt{x^4+1}$ respecte de x, aquesta integral iterada esdevé inabordable. Això no canvia el fet de que usant l'altre integral iterada ja hem calculat I.

Exemple

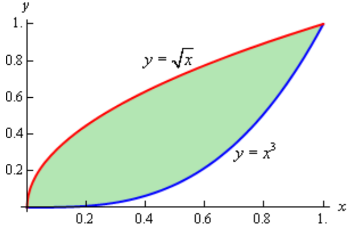
Per la integral doble $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *, formalitzeu-ne les dues integrals iterades i calculeu el valor de* I *, on:* $f(x,y) = 4\,x\,y - y^3$ *i* $D \subset \mathbb{R}^2$ *regió acotada entre les corbes* $y = \sqrt{x}$ *i* $y = x^3$ *.*



Parametrizem el domini D com a domini x-elemental i com a domini y-elemental. Per fer-ho, el primer pas és trobar els punts intersecció de les dues corbes que delimiten D (que viu en el semi-pla $x \geq 0$):

$$\sqrt{x} = y = x^3 \iff x = x^6 \iff x = 0 \text{ o bé } 1 = x^5 \iff x \in \{0, 1\}.$$

Els punts intersecció són $(0,0)$ i $(1,1)$ i D és el domini de la figura.



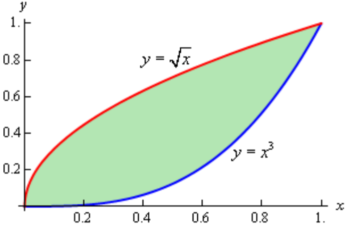
Descriure D com domini x-elemental és directe: $0 \leq x \leq 1$ i, per a cada valor de x en aquest rang, la y és mou entre les dues corbes límit, $y = x^3$ i $y = \sqrt{x}$. Per tant: $x^3 \leq y \leq \sqrt{x}$. Així:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$I = \iint_D (4\,x\,y - y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4\,x\,y - y^3)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[2\,x\,y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\left(2\,x^2 - \frac{x^2}{4} \right) - \left(2\,x^7 - \frac{x^{12}}{4} \right) \right) dx$$

$$= \left[\frac{7}{12}\,x^3 - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{13}}{52} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{52} = \frac{55}{156}.$$



Descriure D com domini y-elemental requereix expressar les corbes límit no com y funció de x, sinó com x funció de y:

$$y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}, \qquad y = \sqrt{x} \iff x = y^2.$$

En D tenim $0 \leq y \leq 1$ i, per a cada valor de y en aquest rang, la x és mou entre les dues corbes límit (expressant x en termes de y):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 1,\, y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\},$$

$$I = \iint_D (4\,x\,y - y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} (4\,x\,y - y^3)\,dx \right) dy.$$

El càlcul és ara:

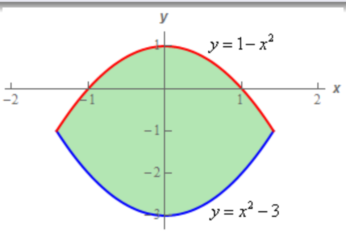
$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}}(4\,x\,y-y^3)\,dx\right)\,dy=\int_0^1\left[2\,x^2\,y-y^3\,x\right]_{x=y^2}^{x=y^{1/3}}\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\left(2\,y^{5/3}-y^{10/3}\right)-\left(2\,y^5-y^5\right)\right)\,dy=$$

$$=\int_0^1\left[2\frac{y^{8/3}}{8/3}-\frac{y^{13/3}}{13/3}-\frac{y^6}{6}\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{3}{4}-\frac{3}{13}-\frac{1}{6}=\frac{55}{156}.$$

Exemple

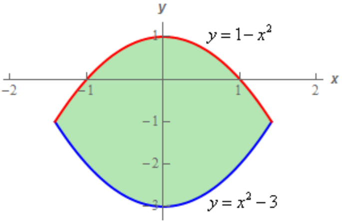
Per la integral doble $I = \text{Àrea}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$ *, formalitzeu-ne les dues integrals iterades i calculeu el valor de* I *, on* $D \subset \mathbb{R}^2$ *regió acotada entre les corbes* $y = 1 - x^2$ *i* $y = x^2 - 3$ *.*



Parametrizem el domini D com a domini x i y-elemental. Busquem els punts intersecció de les dues corbes que delimiten D:

$$1 - x^2 = y = x^2 - 3 \iff 2x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{2}.$$

Els punts intersecció són $(\sqrt{2}, -1)$ i $(-\sqrt{2}, -1)$. Per veure que D és com en la figura, només cal xequejar com és la gràfica de les dues paràboles que en fan de límit.



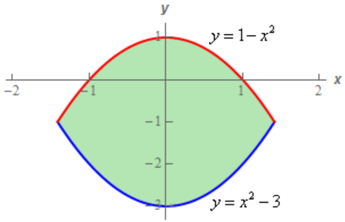
Descriure D com domini x-elemental és directe: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ i, per a cada valor de x en aquest rang, la y és mou entre les dues corbes límit, $x^2 - 3 \leq y \leq 1 - x^2$. Així:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2},\, x^2 - 3 \leq y \leq 1 - x^2\},$$

$$I = \iint_D dx\, dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-3}^{1-x^2} 1\, dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [y]_{y=x^2-3}^{y=1-x^2}\, dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left((1 - x^2) - (x^2 - 3) \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(4 - 2\,x^2 \right) dx$$

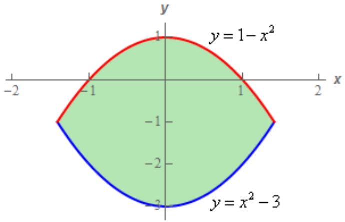
$$= 2 \left[4\,x - \frac{2}{3}\,x^3 \right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}} = 2 \left(4\,\sqrt{2} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 \right) = \frac{16}{3}\,\sqrt{2}.$$



Descriure D com domini y-elemental requereix expressar les corbes límit no com y funció de x, sinó com x funció de y:

$$y = 1 - x^2 \iff x^2 = 1 - y \iff x = \pm\sqrt{1-y},$$
$$y = x^2 - 3 \iff x^2 = y + 3 \iff x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Per descriure D com domini y-elemental, l'hem de trencar en dos trossos dependent de quina expressió per les corbes límit, x en funció de y, cal triar en cada tros. Concretament, cal trencar l'interval $y \in [-3, 1]$ com unió dels intervals $y \in [-3, -1]$ i $y \in [-1, 1]$.



$$(y = 1 - x^2 \iff x = \pm\sqrt{1-y}, \quad y = x^2 - 3 \iff x = \pm\sqrt{y+3}.)$$

Concretament, fem $D = D_1 \cup D_2$, on:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -3 \le y \le -1, \ -\sqrt{y+3} \le x \le \sqrt{y+3}\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le y \le 1, \ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\},$$
$$I = \iint_D dx\,dy = \iint_{D_1} dx\,dy + \iint_{D_2} dx\,dy$$
$$= \int_{-3}^{-1} \left(\int_{-\sqrt{y+3}}^{\sqrt{y+3}} 1\,dx \right) dy + \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} 1\,dx \right) dy.$$

(Exercici: Obtingueu $\text{Àrea}(D)$ calculant aquestes dues integrals.)

Exemple

Per la integral doble $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *, formalitzeu-ne les dues integrals iterades i calculeu el valor de* I*, on:* $f(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}$ *i* $D \subset \mathbb{R}^2$ *el triangle de vèrtexs* $(0,0)$*,* $(1,0)$*,* $(1,1)$*.*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x\},$$

$$I = \iint_D \mathrm{e}^{y/x}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \mathrm{e}^{y/x}\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{e}^{y/x}}{1/x}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 x\,(\mathrm{e}-1)\,dx = (\mathrm{e}-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le 1,\, y \le x \le 1\},$$

$$I = \iint_D \mathrm{e}^{y/x}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 \mathrm{e}^{y/x}\,dx\right) dy,$$

però no sabem calcular cap primitiva explícita de $\mathrm{e}^{y/x}$ respecte de x.

Integrals iterades i Teorema Fubini per integrals triples

• Sigui $g(x,y,z)$ una funció contínua en $P=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ (paral·lepíped de $\mathbb{R}^3$). La integral triple de $g(x,y,z)$ en P es pot calcular usant qualsevol de les seves integrals iterades. Per exemple:

$$\iiint_P g(x,y,z)\,dx\,dx\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f g(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$
$$= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b g(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz.$$

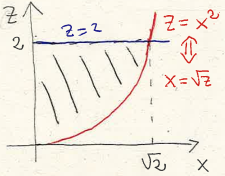
• Sigui $f(x,y,z)$ una funció contínua en un “domini elemental” $D\subset\mathbb{R}^3$ que suposem que, p. ex., podem parametritzar de la forma següent:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x), h_1(x,y)\le z\le h_2(x,y)\}.$$

Llavors:

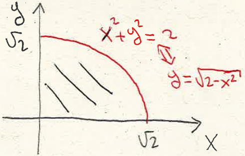
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dx\,dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

- Exemple: Sigui $D \subset \mathbb{R}^3$ la regió limitada pels plans $x=y=z=0$, $z=2$, i la superfície $z=x^2+y^2$, continguda en el primer octant de $\mathbb{R}^3$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$. Calcular $I = \iiint_D x \, dx\, dy\, dz$.



- D s'obté fent girar entorn de l'eix z la part sombrejada del dibuix, però restringida només al primer octant $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

- En particular, la projecció de D sobre el pla x,y, està continguda dins del disc de centre $(0,0)$ i radi 2 restringit al primer quadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$



- Fent girar entorn de l'eix z la primera figura veiem també que els punts $(x,y,z) \in D$ compleixen $\boxed{x^2+y^2 \leq z \leq 2}$, ja que rotant la corba $z=x^2$ entorn de l'eix z s'obté la superfície límit $z=x^2+y^2$.

Anem a donar dues parametritzacions per D

(I) Anem a descriure primer els punts (x,y) de la base de D en el pla $z=0$ i després descriurem quin és el rang de possibles altures z pels punts de D en termes del punt de la base triat.

· La base de D és el disc $x^2+y^2\leq 2$ restringit a $x,y\geq 0$. Per tant, la podem descriure fent: $0\leq x\leq\sqrt{2}$, $0\leq y\leq\sqrt{2-x^2}$

· Un cop fixat un punt (x,y) d'aquesta base, els valors de z corresponents a punts de D que es projecten sobre aquest (x,y) compleixen: $x^2+y^2\leq z\leq 2$.

· Per tant: $\boxed{D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq\sqrt{2},\ 0\leq y\leq\sqrt{2-x^2},\ x^2+y^2\leq z\leq 2\}}$

· Usant aquesta parametrització per D s'obté la integral:

$$I=\iiint_D x\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\right)dy\right)dx.$$

Calculem I

$$I=\int_0^{\sqrt2}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\underbrace{\left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\right)}_{\substack{\parallel \\ x\int_{x^2+y^2}^{2}dz\,=\,x(2-x^2-y^2)}}dy\right)dx=\int_0^{\sqrt2}\underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left(x(2-x^2)-xy^2\right)dy\right)}_{\substack{\parallel \\ \left[x(2-x^2)y-x\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}}}}dz=$$

$$=\int_0^{\sqrt2}\left[\underbrace{x(2-x^2)(2-x^2)^{1/2}}_{\substack{\parallel \\ (2-x^2)^{3/2}}}-\frac{x}{3}(2-x^2)^{3/2}\right]dx=\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt2}x(2-x^2)^{3/2}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{6}\int_0^{\sqrt2}(-2x)(2-x^2)^{3/2}\,dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{(2-x^2)^{5/2}}{5/2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt2}=-\frac{1}{3}\left[0-\frac{2^{5/2}}{5/2}\right]=$$

$$=\frac{2}{3\cdot5}\,2^{5/2}=\frac{2}{15}\cdot2^2\cdot2^{1/2}=\frac{8}{15}\sqrt2.$$

(II) També podem descriure D fent variar primer la seva altura z entre $0 \le z \le 2$ i usant que la condició $x^2+y^2 \le z$ ens diu que els valors de (x,y) que corresponen a punts de D d'altura z pertanyen al disc de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{z}$ restringit al primer quadrant $x,y \ge 0$. Per tant:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{z},\ 0 \le y \le \sqrt{z-x^2}\}$$

$$I = \iiint_D x\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{z-x^2}} x\,dy \right) dx \right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} x\sqrt{z-x^2}\,dx \right) dz =$$

$$= \int_0^2 -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\sqrt{z}} (-2x)(z-x^2)^{1/2}\,dx \right) dz = \int_0^2 -\frac{1}{2}\left[\frac{(z-x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{z}} dz = \int_0^2 -\frac{1}{2}\left[0 - \frac{z^{3/2}}{3/2} \right] dz =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 z^{3/2}\,dz = \frac{1}{3}\left[\frac{z^{5/2}}{5/2} \right]_{z=0}^{z=2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{5/2}}{5/2} = \frac{8}{15}\sqrt{2}.$$

(· Exercici: Recalculeu I usant coordenades cilíndriques a $\mathbb{R}^3$.)

Canvis de variables per integrals dobles

Siguin D^*, D dos oberts acotats de $\mathbb{R}^2$ i T un canvi de variables de la forma:

$$T : D^* \longrightarrow D$$

$$\underbrace{(u,v)}_{\text{"Variables noves"}} \longmapsto \underbrace{(x,y)}_{\text{"Variables velles"}} = \underbrace{T(u,v)}_{\text{Canvi de variables}} = \underbrace{\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)}_{\text{abús de notació: vol dir } x \text{ i } y \text{ expressades en termes } u,v.}$$

(1) T és almenys C^1 en D^* i bijectiva.

(2) $\det(DT(u,v)) \neq 0$, $\forall (u,v) \in D^*$

(En particular, $\exists\, T^{-1} : D \to D^*$ que també és C^1 en D.)

- <u>Def.:</u> Anomenarem jacobià de T al determinant de la seva matriu jacobiana:

$$\boxed{J_T(u,v) = \det(DT(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}}$$

· Teorema (Canvi de variables per integrals dobles)

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció integrable en D, i
$(x,y) \mapsto f(x,y)$

T és el canvi de variables de la pàgina anterior, es satisfà:

$$\underbrace{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\substack{\text{integral de } f(x,y) \text{ en}\\ D \text{ respecte de les}\\ \text{variables "velles" } x,y.}} = \iint_{\underset{\substack{\text{domini}\\ \text{integració}\\ \text{variables}\\ \text{noves } u,v}}{D^*}} \underbrace{f(x(u,v), y(u,v))}_{\substack{\text{expressem } x, y \text{ en}\\ \text{funció variables "noves"}\\ u, v}} \cdot \underbrace{|J_T(u,v)|}_{\substack{\text{Valor absolut del}\\ \text{Jacobià del canvi } T}}\,du\,dv$$

· Corol·lari (Canvi de variables pel càlcul d'àrees)

$$\text{Àrea}(D) \overset{\text{def.}}{=} \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{D^*} |J_T(u,v)|\,du\,dv.$$

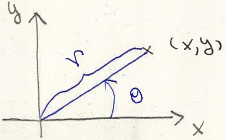
· Observació: A $\mathbb{R}^3$ tot és idèntic canviant funcions de 2 variables per funcions de 3 variables, integrals dobles per triples i Àrea per volum. No ho formalitzem.

Coordenades polars a $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\theta\in(0,2\pi) \\ r\in(0,+\infty)\end{array}}$$

$$T: (0,+\infty)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0, x\geq 0\}$$

$$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = T(r,\theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{\substack{\shortparallel \\ x(r,\theta)}}, \underbrace{r\sin\theta}_{\substack{\shortparallel \\ y(r,\theta)}})$$



· El fet de que les coordenades polars no estiguin definides pels punts de la semi-recta x positiva No té cap influència en el càlcul d'integrals dobles, ja que és un conjunt d'àrea zero.

· Jacobià de les polars

$$J_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r > 0.$$

Per tant, si denotem com $D = T(D^*)$:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r \cdot dr\,d\theta$$

D^*: D expressat en polars

r: Jacobià!

Comentaris:

(1) En particular: $\text{Àrea}(D) = \iint_{D^*} \overset{\text{Jacobià}}{r}\, dr\, d\theta$ ← D expressat en polars

(2) A tenir en compte per determinar el domini per θ:

$$x, y > 0 \iff \theta \in (0, \pi/2)$$
$$y > 0 \iff \theta \in (0, \pi)$$
$$x > 0 \iff \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

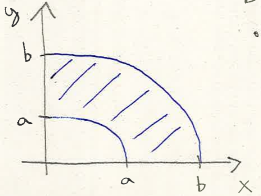
(3) El canvi invers de les polars és: $\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan(y/x)}$

(4) Podem adaptar les coordenades polars a l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ fent el canvi $\left\{\begin{array}{l} x = r \cdot a \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot b \cdot \sin\theta \end{array}\right\}$ on $r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} > 0$ i $\theta \in (0, 2\pi)$,

- Per aquest canvi el jacobià és $\boxed{a \cdot b \cdot r}$
- Si bé l'angle θ no és ara el mateix que el de les polars, el comentari (2) aplica igualment.

- <u>Exemple</u>: Sigui $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ $(0<a<b)$.

Calculeu $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, on $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$



- D és la porció de corona circular / anell de centre $(0,0)$ radi interior a i radi exterior b continguda en el primer quadrant. Si expressem D en polars tenim:

$$D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq r \leq b,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

- Clarament, D^* és un domini producte: $(r,\theta) \in D^* = [a,b] \times [0,\pi/2]$.
- Expressem $f(x,y)$ en polars $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, usant que $x^2+y^2 = r^2$:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = e^{-((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)} = e^{-r^2}.$$

- Per tant:

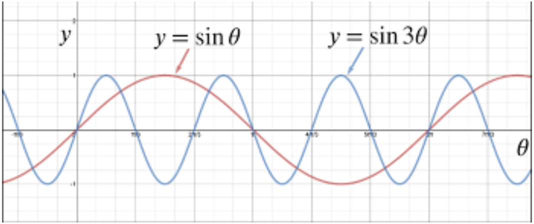
$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot \underset{\text{Jacobià}}{r}\,dr\,d\theta = \iint_{[a,b]\times[0,\pi/2]} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

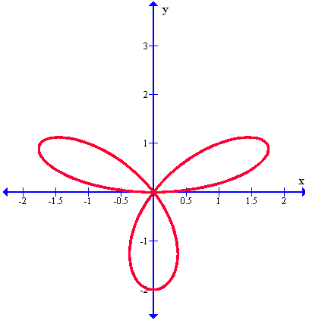
$$= \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\int_a^b (-2r)\,e^{-r^2}\,dr\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-r^2}\right]_{r=a}^{r=b} = \frac{\pi}{4}\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right).$$

Example

Calculeu l'àrea de la regió $A \subset \mathbb{R}^2$ limitada per un "pètal de rosa" de la corba definida en coordenades polars per $r = a\,\sin(3\theta)$, $a > 0$.

- $r = a\,\sin(3\theta)$ només aplica pels $\theta \in [0, 2\pi]$ tals que $\sin(3\theta) \geq 0$.
- $y = \sin(\theta)$, per $\theta \in [0, 2\pi]$, és ≥ 0 síí. $0 \leq \theta \leq \pi$. La seva extensió 2π-periòdica a tot $\mathbb{R}$ és ≥ 0 si $2\pi \leq \theta \leq 3\pi$, $4\pi \leq \theta \leq 5\pi$, etc.
- $y = \sin(3\theta)$ comprimeix si $\theta \in [0, 2\pi]$ el graf de $\sin(\theta)$ si $\theta \in [0, 6\pi]$. Així, el graf $y = \sin(3\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, són tres copies comprimides del de $\sin(\theta)$ que són ≥ 0 si $0 \leq 3\theta \leq \pi$, $2\pi \leq 3\theta \leq 3\pi$, $4\pi \leq 3\theta \leq 5\pi$.
- $y = \sin(3\theta)$ és ≥ 0 si $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi$, $\dfrac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \dfrac{5}{3}\pi$. En els extrems d'aquests intervals $\sin(3\theta)$ val 0. En els punts migs val 1.





- Si l'angle θ creix de $\theta = 0$ a $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, la distància $r = a\sin(3\theta)$ a l'origen creix de $r = 0$ a $r = a$. Si θ creix de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ a $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, r decreix de $r = a$ a $r = 0$. Així, obtenim el primer pètal de la figura. Els altres pètals corresponen a triar $\dfrac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi$ i $\dfrac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \dfrac{5}{3}\pi$.
- Volem l'àrea del domini A tancat pel primer pètal, que en polars és:

$$A^* = \left\{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq r \leq a\sin(3\theta)\right\}.$$

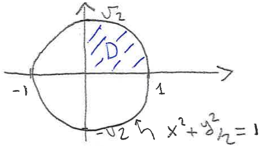
$$A^* = \left\{ (\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}, \, 0 \le r \le a \sin(3\theta) \right\}.$$

Usant que l'expressió de A en polars és A^*, obtenim (cal multiplicar pel jacobià del canvi a polars, que és r, aplicar Fubini per calcular l'integral en polars i recordar la fórmula del sinus de l'angle doble per integrar $\sin^2(3\theta)$):

$$\begin{aligned}
\text{Àrea}(A) &= \iint_A dx\, dy = \iint_{A^*} r\, d\theta\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{a \sin(3\theta)} r\, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=a \sin(3\theta)} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(3\theta)\, d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1 - \cos(6\theta)}{2} \right) d\theta = \frac{a^2}{4} \left[\theta - \frac{\sin(6\theta)}{6} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{a^2}{4} \left(\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2\pi)}{6} \right) - \left(0 - \frac{\sin(0)}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{12} a^2.
\end{aligned}$$

- <u>Exemple</u>: $f(x,y) = x \cdot y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Calculem $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.



- D és el domini tancat per l'el·lipse $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ restringit al 1er. quadrant $x \ge 0$, $y \ge 0$.
- El natural és usar coordenades polars adaptades a una el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donades per:

$r^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ⟶ $\boxed{x = r\,a\cos\theta,\ y = r \cdot b \cdot \sin\theta, \text{ que tenen jacobià } r \cdot a \cdot b.}$

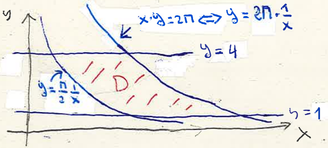
- En el nostre cas, $\boxed{a = 1,\ b = \sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{x = r\cos\theta,\ y = \sqrt{2}\,r\sin\theta,\ \text{jacobià} = \sqrt{2}\cdot r}$
- L'angle θ en el 1er. quadrant és $0 \le \theta \le \pi/2$ i el valor de r en D compleix $0 \le r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$. Per tant, D en polars adaptades és

$D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 1\}$. Així:

$$I = \iint_D x \cdot y\,dx\,dy = \iint_{D^*} (r\cos\theta)(\sqrt{2}\,r\sin\theta)(\sqrt{2}\,r)\,dr\,d\theta = 2\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$= 2\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1/4.$$

- Exemple: $f(x,y) = y\cos(xy)$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 4, \frac{\pi}{2} \le xy \le 2\pi\}$



Calculem $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ fent primer un canvi de variables que transformi D en un rectangle D^*.

Fem un canvi de la forma $(x,y) = T(u,v)$ on el natural és triar u,v t.q.:

$$u = xy \,,\; v = y \Leftrightarrow (x,y) = (u/v, v) = T(u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x(u,v) = u/v \\ y(u,v) = v \end{cases}$$

D'aquesta forma D expressat en (u,v) esdeve $D^* = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \le u \le 2\pi,\ 1 \le v \le 4\}$

El jacobià del canvi és:

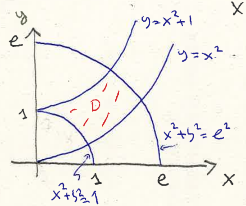
$$J_T(u,v) = \det(DT(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} > 0 \text{ en } D^*$$

Per tant:

$$I = \iint_D y\cos(xy)\,dx\,dy = \iint_{D^*} v\cdot\cos(u)\cdot\overbrace{\frac{1}{v}}^{\text{jacobià}}\,du\,dv = \left(\int_{\pi/2}^{2\pi}\cos(u)\,du\right)\left(\int_1^4 dv\right) =$$

$$= \left[\sin u\right]_{u=\frac{\pi}{2}}^{u=2\pi}\cdot(4-1) = (0-1)\cdot(3) = -3.$$

- Exemple: $f(x,y)=\dfrac{x+2xy}{x^2+y^2}$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le x^2+1,\ 1\le x^2+y^2\le e^2,\ x\geq 0\}$



Calcular $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, fent primer un canvi de variables que transformi D en un rectangle D*.

(No juga cap paper per visualitzar D)

$D=\{0\le y-x^2\le 1,\ 1\le x^2+y^2\le e^2,\ \underbrace{x\geq 0}\}$, esdevé $D^*=\{1\le u\le e^2,\ 0\le v\le 1\}$

- Si fem $u=x^2+y^2$, $v=y-x^2$, si el canvi és $(x,y)=T(u,v)$, observem que el que tenim de forma directa és $(u,v)=T^{-1}(x,y)$, donada per $(u,v)=T^{-1}(x,y)=(x^2+y^2,\ y-x^2)$. Per calcular $T(u,v)$ explícitament, hem d'invertir el canvi. Com veurem no ens cal fer-ho, ja que d'entrada l'únic que ens cal és el jacobià de $T(u,v)$ que compleix: $\boxed{J_T(u,v)=\dfrac{1}{J_{T^{-1}}(x,y)}}$ (on (x,y) i (u,v) és relacionen via T)

Així: $(u,v) = T^{-1}(x,y) = (x^2+y^2,\ y-x^2)$. Per tant:

$$J_{T^{-1}}(x,y) = \det\left(DT^{-1}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 2(x+2xy) > 0 \text{ en } D.$$

D'aquí: $J_T(u,v) = \dfrac{1}{J_{T^{-1}}(x,y)} = \dfrac{1}{2(x+2xy)} > 0$ ← (En principi cal expressar-lo en termes u,v, però esperem...)

Per tant, usant que el canvi ve donat per $u=x^2+y^2$, $v=y-x^2$; amb jacobià $J_T(u,v) = \dfrac{1}{2(x+2xy)}$ i que D en variables (u,v) esdevé $\boxed{D^* = \{1 \le u \le e^2,\ 0 \le v \le 1\}}$,

Tenim:

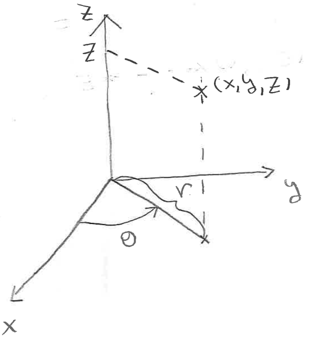
(cal expressar $f(x,y)$ en termes u,v!)

$$I = \iint_D \frac{x+2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{D^*} \overbrace{\frac{x+2xy}{x^2+y^2}} \cdot J_T(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \iint_{D^*} \frac{x+2xy}{x^2+y^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(x+2xy)}}_{\text{no hem expressat } J_T(u,v) \text{ en termes } u,v} du\,dv = \frac{1}{2}\iint_{D^*} \frac{du\,dv}{x^2+y^2} \underset{u=x^2+y^2}{=} \frac{1}{2}\left(\int_1^{e^2} \frac{du}{u}\right)\left(\int_0^1 dv\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(u)\right]_{u=1}^{u=e^2} \cdot [1-0] = \frac{1}{2}\left(\ln(e^2) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}(2-0) = 1.$$

Coordenades Cilíndriques en $\mathbb{R}^3$



• Donat $(x,y,Z) \in \mathbb{R}^3$, les seves coordenades cilíndriques (r,θ,Z) són:

* La coord. Z és la mateixa
* "Deixem caure" (projectem) el punt (x,y,Z) en el pla (x,y) i (r,θ) són les coord. polars de (x,y).

$$\boxed{\begin{aligned} T: (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \\ (r\;\;,\;\;\theta,\;\;Z) &\longmapsto (x,y,Z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, Z) \end{aligned}}$$

• Commentaris :

(i) Les coord. cilíndriques no estan definides si $(x,y,z) \in \Sigma$,

on $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=0,\ x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$

(Σ és el semi-pla $x \geq 0$ del pla X, Z)

Com que $\text{Volum}(\Sigma) = 0$, això no té cap influència en el càlcul d' integrals triples.

(ii) Cilíndriques especialment indicades per dominis de revolució entorn de l' eix Z. Com els reconeixem? Perquè estan definits en termes de x^2+y^2

(observem que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ = distància de (x,y,z) a l' eix Z).

- Jacobià de les cilíndriques:

$$J_T(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array} \right\}$$

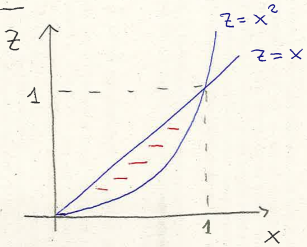
- Camvi de coord. cilíndriques en integrals triples

- $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$

- $\text{Volum}(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} r\,dr\,d\theta\,dz$

(D^* és D expressat en cilíndriques).

- **Exemple:** Calculeu el volum del domini $D \subset \mathbb{R}^3$ comprès entre el con $z^2 = x^2+y^2$ i el paraboloide $z = x^2+y^2$, per $0 \le z \le 1$



- Les dues superfícies, $z^2 = x^2+y^2$ i $z = x^2+y^2$ són de revolució entorn de l'eix z ja que estan definides en termes de x^2+y^2.
- Fent secció amb el semi-plà $\{y=0,\ z>0\}$ obtenim les corbes $z^2 = x^2 \Leftrightarrow z = x$ i $z = x^2$ que girant entorn de l'eix z generen les dues superfícies.

- El domini D està doncs definit per les restriccions:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{z},\ 0 \le z \le 1\}$$

- Si anomenem D^* el domini D expressat en coord. cilíndriques, llavors:

$$D^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1,\ z \le r \le \sqrt{z}\}$$

· Em la secció de D pel semi-pla $\{y=0, x>0\}$ es veu que la coordenada x, que dóna la distància a l'eix z, compleix que està entre les corbes $z=x$ (cota inferior) i $z=x^2$ (cota superior). Per tant, $z \leq x \leq \sqrt{z}$.

· Em girar entorn de l'eix z, la distància a l'eix z de tot punt de D també ha de complir $z \leq \text{dist}((x,y,z), \text{eix } z) \leq \sqrt{z}$. Ara només cal usar que aquesta distància és $\sqrt{x^2+y^2}$.

· Si expressem D en coord. cilíndriques $\{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z\}$ el pas de l'expressió de D a la de D^* és automàtic usant que $r=\sqrt{x^2+y^2}$ i que l'angle θ pot girar lliurement entorn l'eix z.

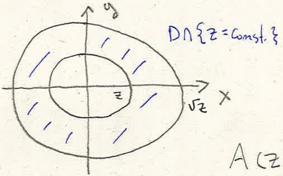
· Llavors, usant $D^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1, z \leq r \leq \sqrt{z}\}$:

$$\text{Volum}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_z^{\sqrt{z}} r\,dr\right)dz\right)d\theta =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\int_0^1\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=z}^{r=\sqrt{z}} dz = \pi\int_0^1 (z-z^2)\,dz = \pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1} = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}.$$

· Observació: també podem calcular fàcilment volum (D) aplicant el principi de Cavalieri, tot fent seccions $D \cap \{z = \text{const.}\}$ amb $0 \leq z \leq 1$. En efecte, en ser les dues superfícies límit de revolució entorn de l'eix z, aquest domini secció és una



corona circular de radi interior z i radi exterior $\sqrt{z}$. L'àrea del domini secció és:

$$A(z) = \underbrace{\pi (\sqrt{z})^2}_{\substack{\text{àrea disc} \\ \text{radi } \sqrt{z}}} - \underbrace{\pi\, z^2}_{\substack{\text{àrea disc} \\ \text{radi } z}} = \pi (z - z^2)$$

Per Cavalieri:

$$\text{Volum } (D) = \int_0^1 A(z)\, dz = \int_0^1 \pi (z - z^2)\, dz = \frac{\pi}{6}.$$

• Exemple: $f(x,y,z) = x^2+y^2$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

Calculeu $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

• L'equació $x^2+y^2=R^2$ descriu un cilindre de revolució entorn de l'eix Z de radi R.

• D és el domini comprés entre un cilindre de radi 1 i un de radi 2 amb tapa inferior $z=0$ i superior $z=2$.

• Si expressem D en coord. cilíndriques, $\{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z\}$ obtenim $D^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

(recordeu: $r^2 = x^2+y^2$.)

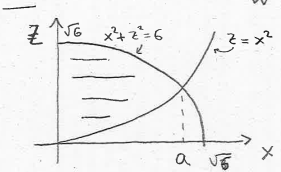
• $f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = r^2$ és $f(x,y,z)$ en cilíndriques.

• $$I = \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} r^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jacobià!}}}{r}\, dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^2 dz\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2} \cdot [2\pi]\cdot[2] = 4\pi\left[\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right] = 15\pi.$$

· **Exemple:** $f(x,y,z)=z$, $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 6,\ x^2+y^2\le z,\ z\ge 0\}$

Calculeu $I=\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.



· El fet de que W estigui definit en termes de "x^2+y^2" ens diu que W és un domini de revolució entorn de l'eix Z. El natural és calcular I usant coord. cilíndriques. (en esfèriques és força més dur!)

· $W\cap\{y=0,\ x\ge 0\}$ és el domini sombrejat de la figura. W s'obté girant-lo entorn de l'eix Z.

· Expressem W en cilíndriques: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2\le 6 \longrightarrow r^2+z^2\le 6 \\ x^2+y^2\le z \longrightarrow r^2\le z \end{array}\right\} \Rightarrow 0\le r\le a,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}$$

Atenent a que el paper de x en la figura és el mateix que el de r (distància de (x,y,z) a l'eix Z)

(Cal afegir, a més, $z\ge 0$ i $0\le\theta\le 2\pi$ ja que l'angle pot girar lliurement entorn eix Z)

El valor de "a" correspon al valor de $r>0$ pel que es tallen les corbes $r^2+z^2=6$ i $r^2=z$.

• Tall de $r^2+z^2=6$, $r^2=z \Rightarrow r^2+(r^2)^2=6 \Rightarrow (r^2)^2+r^2-6=0$ (biquadràtica)

$$0<r^2=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\begin{cases}\nearrow=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow r^2=2\Rightarrow r=\sqrt{2}\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{2}}\\ \searrow=-\frac{6}{2}=-3 \text{ No!}\end{cases}$$

• Per tant, W en cilíndriques és:

$$W^*=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le r\le\sqrt{2},\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$\cdot I=\iiint_W z\,dx\,dy\,dz=\iiint_{W^*} z\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Jacobià}}}{r}\,dr\,d\theta\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ \text{la funció que integrem}\\ \text{no depèn de }\theta}}{=}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\cdot r\,dz\right)dr\right)=$$

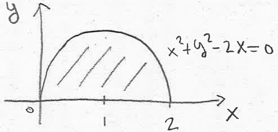
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=r^2}^{z=\sqrt{6-r^2}}dr=\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\left((6-r^2)-r^4\right)dr=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(6r-r^3-r^5)\,dr=$$

$$=\pi\left[\frac{6r^2}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}}=\pi\left(3\cdot2-\frac{2^2}{4}-\frac{2^3}{6}\right)=\frac{11}{3}\pi.$$

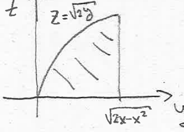
- Exemple: $f(x,y,z) = xz$, $W \subset \mathbb{R}^3$ domini limitat pel cilindre circular de base $x^2+y^2-2x=0$ i la superfície $z^2=2y$ $(y,z \geq 0)$.

Calculem $I = \iiint_W f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$.

- $x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1^2$ defineix una circumferència en el pla x,y de centre $(1,0)$ i radi 1. Si afegim l'efecte de la variable z, l'equació $x^2+y^2-2x=0$ en $\mathbb{R}^3$ és la d'un cilindre circular d'eix z.
- El paper de $z^2=2y \Leftrightarrow z=\sqrt{2y}$ és el de tapa superior (no plana) de W, de forma que l'altura de W depèn del valor de y en la base.



Secció $W \cap \{z=0\}$ (base de W)



Secció $W \cap \{x = \text{const.}\}$, $x \in [0,2]$. El valor de y en aquesta secció és com a molt $\sqrt{2x-x^2}$ que s'obté de l'equació $x^2+y^2-2x=0$.

- $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2x \leq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2y}\}$
- Com que el cilindre $x^2+y^2-2x=0$ té eix paral·lel al z, però desplaçat, usem coord. cilíndriques desplaçades.

· Fem: $\boxed{x = 1 + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z}$. El desplaçament no té cap efecte en el Jacobià del canvi que igualment és $= r$.

· $W = \{\underbrace{x^2+y^2-2x \le 0}_{(x-1)^2+y^2 \le 1},\ y \geq 0, 0 \le z \le \sqrt{2y}\}$ en cilíndriques desplaçades esdevé:

$W^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le \sqrt{2r\sin\theta}\}$. Em efecte:

· $(x-1)^2+y^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le 1$

· $r\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi$.

· Per tant:

$$I = \iiint_W x\,z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} (1+r\cos\theta)\cdot z \cdot \overset{\substack{\text{Jacobià}\\ \downarrow}}{r}\, dr\,d\theta\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\sqrt{2r\sin\theta}} r(1+r\cos\theta) z\, dz \right) d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\pi r(1+r\cos\theta) \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{2r\sin\theta}} d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^\pi r(1+r\cos\theta)\, r\sin\theta\, d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\pi (r^2\sin\theta + r^3 \sin\theta\cdot\cos\theta)\, d\theta \right) dr = \int_0^1 \left[-r^2\cos\theta + r^3 \frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr =$$

$$= \int_0^1 2r^2\, dr = 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2}{3}.$$

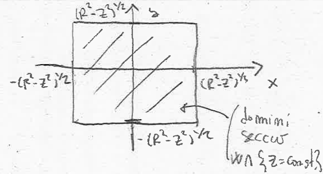
- Exemple: Calculem el volum del sòlid de Steinmetz $W \subset \mathbb{R}^3$ definit per la intersecció dels sòlids $y^2+z^2 \leq R^2$ i $x^2+z^2 \leq R^2$ (cilindres circulars del mateix radi R, d'eixos x i y, respectivament, que es tallen perpendicularment en $(0,0,0)$)

· Contràriament al que pot semblar a primer cop d'ull, no és pas una bona idea usar coord. cilíndriques per calcular volum (W). El càlcul és senzill si s'usa el principi de Cavalieri fent seccions de W per plans $\{z = \text{const.}\}$

· Així, si fixem $z \in [-R, R]$, les condicions $y^2+z^2 \leq R^2$ i $x^2+z^2 \leq R^2$ ens diuen:

$$y^2+z^2 \leq R^2 \Rightarrow y^2 \leq R^2-z^2 \Rightarrow -(R^2-z^2)^{1/2} \leq y \leq (R^2-z^2)^{1/2}$$

$$x^2+z^2 \leq R^2 \Rightarrow x^2 \leq R^2-z^2 \Rightarrow -(R^2-z^2)^{1/2} \leq x \leq (R^2-z^2)^{1/2}$$

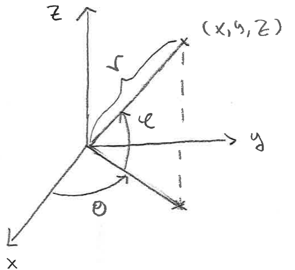


· Per tant, el domini secció $W \cap \{z = \text{const.}\}$ és un quadrat de costats de longitud $2(R^2-z^2)^{1/2}$, que té àrea $A(z) = \left[2(R^2-z^2)^{1/2}\right]^2 = 4(R^2-z^2)$

· Per Cavalieri:

$$\text{Volum}(W) = \int_{-R}^{R} A(z)\,dz = 4\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)\,dz = 4\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-R}^{z=R} = 8\left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = \frac{16}{3}R^3$$

Coordenades esfèriques en $\mathbb{R}^3$



· Donat $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, les seves coord. esfèriques (r, θ, φ) són:

* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és la distància a l'origen.

* φ és la latitud: angle que forma el vector (x,y,z) amb la seva projecció en el pla (x,y)

($\varphi > 0$: hemisferi nord

$\varphi < 0$: hemisferi sud)

* θ és la longitud: angle que forma la projecció de (x,y,z) en el pla (x,y) amb l'eix x.

$$\boxed{\begin{aligned} T : (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \\ (r\ \ ,\ \ \theta,\ \ \varphi) &\longmapsto (x,y,z) \\ \text{on: } x = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = r\cos\varphi\sin\theta,\ & z = r\sin\varphi \end{aligned}}$$

- Comentaris:

(i) Les Coord. esfèriques no estan definides en el mateix semi-pla Σ que les cilíndriques

(ii) Esfèriques especialment indicades per dominis amb simetria esfèrica respecte l'origen

(Els reconeixem perquè estan definits en termes de $x^2+y^2+z^2$).

- Jacobià de les esfèriques:

$$J_T(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\varphi > 0.$$

- Canvi coord. esfèriques en integrals triples

- $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

- $$\text{Volum}(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

(D^* és D expressat en esfèriques)

— Exemple: Useu les coordenades esfèriques per calcular

$I = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, on D és el domini determinat per les desigualtats: $\boxed{2z^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4z^2;\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4;\ x, y, z \ge 0}$

D

$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \rightsquigarrow 1 \le r^2 \le 4 \Rightarrow \boxed{1 \le r \le 2}$

$x, y \ge 0 \rightsquigarrow \boxed{0 \le \theta \le \pi/2}$ (longitud)

$z \ge 0 \rightsquigarrow \boxed{0 \le \varphi \le \pi/2}$ (latitud positiva)

$2z^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4z^2 \rightsquigarrow 2r^2\sin^2\varphi \le r^2 \le 4r^2\sin^2\varphi$

$D^* \equiv$ domini D en esfèriques

$2\sin^2\varphi \le 1 \le 4\sin^2\varphi$

$\sin\varphi \le \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi \ge \frac{1}{2}$

$\varphi \le \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\varphi \ge \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}}$$

Per tant: $\boxed{D^* = \{1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4\}}$

Finalment,

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

on $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Així:

$$I = \iiint_{D^*} \underbrace{r}_{\substack{\uparrow \\ f \text{ en esfèriques}}} \cdot r^2\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/4} r^3\cos\varphi\, d\varphi\right) d\theta\right) dr =$$

$$= \left(\int_1^2 r^3\, dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\cdot\left(\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\sin\varphi\right]_{\varphi=\pi/6}^{\varphi=\pi/4} =$$

$$= \frac{2^4-1^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{15\pi}{16}(\sqrt{2}-1).$$

- <u>Exemple</u>: Calculeu el volum de l'el·lipsoide $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ on $a, b, c > 0$. (Cas $a=b=c=R \Rightarrow W$ bola de radi R i volum $\frac{4}{3}\pi R^3$)

- Usem coord. esfèriques adaptades a l'el·lipsoide:

$x = a \cdot r \cos\theta \cos\varphi$, $y = r \cdot b \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$, $z = r \cdot c \cdot \sin\varphi$

que tenen jacobià $= a \cdot b \cdot c\, r^2 \cos\varphi > 0$ i compleixen $r^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

(Els angles θ, φ juguen un paper semblant als de les esfèriques però no són exactament la longitud i la latitud).

$W^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$\text{Volum}(W) = \iiint_W dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} \underbrace{abc\,r^2\cos\varphi}_{\text{Jacobià esfèriques adaptades}}\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= abc\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right) = abc\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot(2\pi)\cdot\left[\sin\varphi\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= abc\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi}{3}abc$$

Aplicacions de la integral múltiple

- Def.: Mitjana d'una funció

(I) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funció d'una variable. La mitjana de f en $[a,b]$ és:

$$\bar{f} = V_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(II) $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funció de 2 variables. La mitjana de f en D és:

$$\bar{f} = V_m(f) = \frac{1}{\text{Àrea}(D)}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,, \text{ on } \text{Àrea}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$$

(III) $f: W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funció de 3 variables. La mitjana de f en W és:

$$\bar{f} = V_m(f) = \frac{1}{\text{Volum}(W)}\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,, \text{ on } \text{Volum}(W) = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz.$$

- Exemple: Calculem la mitjana dels quadrats de les distàncies dels punts de la bola $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ al punt $(0,0,c) \in \mathbb{R}^3$.

· La funció a promitjar és $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-c)^2 = x^2+y^2+z^2-2cz+c^2$

· $\bar{f} = \dfrac{I}{\text{Volum}(B)}$, on $I = \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ i $\text{Volum}(B) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$\cdot\ I = \underbrace{\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz}_{= J} - 2c\underbrace{\iiint_B z\,dx\,dy\,dz}_{\substack{= 0 \text{ (per} \\ \text{simetria)}}} + c^2\underbrace{\iiint_B 1\,dx\,dy\,dz}_{= \text{Volum}(B)}$$

· Usem coord. esfèriques $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\cos\varphi\sin\theta$, $z = r\sin\varphi$ per calcular J.

· Si expressem B en esfèriques: $B^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$J = \iiint_{B^*} r^2 \cdot \underbrace{r^2\cos\varphi}_{= \text{jacobià}}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi\right) = \frac{4}{5}\pi R^5.$$

· Finalment: $\bar{f} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(\frac{4}{5}\pi R^5 + c^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{3}{5}R^2 + c^2$.

· Exemple (més dur!): Mateix càlcul anterior per calcular la mitjana de les distàncies en el cas $C > R$.

· Ara cal promitjar la funció $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2cz+c^2}$

· Calculem $I = \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ usant coord. esfèriques:

$$\cdot\ I = \iiint_{B^*} \sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\ x^2+y^2+z^2}}{r^2} - 2c\underbrace{r\sin\varphi}_{\substack{\uparrow\\ z}} + c^2}\ \underbrace{r^2\cos\varphi}_{\substack{\uparrow\\ \text{Jacobià}}}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot J = 2\pi\cdot J, \text{ on:}$$

$$\cdot\ J = \int_0^R \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2-2cr\sin\varphi+c^2)^{1/2}\cdot r^2\cos\varphi\,d\varphi\right)dr = \int_0^R \frac{-r}{2c}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(r^2-2cr\sin\varphi+c^2)^{1/2}\cdot\overbrace{(-2cr\cos\varphi)}^{\frac{\partial}{\partial\varphi}(-2cr\sin\varphi)}d\varphi\right)dr$$

$$= -\frac{1}{2c}\int_0^R r\left[\frac{(r^2-2cr\sin\varphi+c^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} dr = -\frac{1}{3c}\int_0^R r\Big[(\underbrace{r^2-2cr+c^2}_{=(r-c)^2})^{3/2} - (\underbrace{r^2+2cr+c^2}_{=(r+c)^2})^{3/2}\Big]dr =$$

$$= -\frac{1}{3c}\int_0^R r\left[(c-r)^3-(r+c)^3\right]dr = \frac{1}{3c}\int_0^R(2r^4+6c^2r^2)\,dr = \frac{1}{3c}\left[\frac{2r^5}{5}+\frac{6c^2r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{2}{3c}\left[\frac{R^5}{5}+c^2R^3\right]$$

$\uparrow$ $(c > R \geq r \Rightarrow \sqrt{(r-c)^2} = c-r)$

· Finalment: $\bar{f} = \dfrac{I}{\text{volum}(B)} = \dfrac{R^2}{5c} + c$

- <u>Def</u>: Massa d'un cos

(I) $\rho:[a,b]\to[0,+\infty)$ densitat lineal de massa d'un cos rectilini de longitud $L=b-a$. Llavors la massa total d'aquest cos és:

$$m([a,b])=\int_a^b \rho(x)\,dx$$

(II) $\rho: D\subset\mathbb{R}^2\to[0,+\infty)$ densitat superficial de massa d'un cos pla. Llavors:

$$m(D)=\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$

(III) $\rho: W\subset\mathbb{R}^3\to[0,+\infty)$ densitat de massa d'un cos a $\mathbb{R}^3$. Llavors:

$$m(W)=\iiint_W \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

- <u>Exemple</u>: calculem la massa de $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\}$ (làmina quadrada) amb densitat superficial $\rho(x,y)=K\cdot(x^2+y^2)$ (Proporcional distància (0,0) al quadrat)

$$m(D)=\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^a\left(\int_0^a K\cdot(x^2+y^2)\,dx\right)dy = K\int_0^a\left[\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x\right]_{x=0}^{x=a}dy=$$

$$=K\int_0^a\left(\frac{a^3}{3}+ay^2\right)dy=K\left[\frac{a^3}{3}y+a\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=a}=\frac{2}{3}K\cdot a^4$$

- <u>Exemple</u>: Calcular la massa de la bola $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ suposant que està formada per capes concèntriques homogènies, de forma que la densitat de massa és la mateixa en tots els punts de l'esfera de centre $(0,0,0)$ i radi $r\in[0,R]$ i donada per $\rho(x,y,z)=\dfrac{K}{1+x^2+y^2+z^2}$

- Usem coord. esfèriques per calcular la massa

$x=r\cos\varphi\cos\theta,\ y=r\cos\varphi\sin\theta,\ z=r\sin\varphi$

- El domini B en esfèriques és: $B^*=\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : 0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$
- La densitat $\rho(x,y,z)$ en esfèriques és $=\dfrac{K}{1+r^2}$ (la funció que integrem no depèn de θ)
- $m(B)=\iiint_B \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{B^*}\dfrac{K}{1+r^2}\underbrace{r^2\cos\varphi}_{\text{Jacobià}}\,dr\,d\theta\,d\varphi \overset{\downarrow}{=}$

$$= K\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right)}_{2}\left(\int_0^R\frac{r^2}{1+r^2}dr\right)=4K\pi\int_0^R\left(1-\frac{1}{1+r^2}\right)dr=$$

$$=4K\pi\Big[r-\arctan(r)\Big]_{r=0}^{r=R}=4K\pi\,(R-\arctan(R))$$

- Def: Centre de masses CM

(I) $\rho : [a,b] \to [0,+\infty)$ densitat lineal de massa en $[a,b]$. Llavors, el seu centre de masses és: $\bar{x} = CM([a,b]) = \frac{1}{m([a,b])} \int_a^b x \cdot \rho(x)\, dx.$

(II) $\rho : D \subset \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ densitat superficial de massa en D. El seu centre de masses és: $(\bar{x}, \bar{y}) = CM(D)$, on: $\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \rho(x,y)\, dx\, dy$, $\bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \rho(x,y)\, dx\, dy$

(III) $\rho : W \subset \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty)$ densitat de massa en W. El seu centre de masses és:

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = CM(W)$, on: $\bar{x} = \frac{1}{m(W)} \iiint_W x \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$, $\bar{y} = \frac{1}{m(W)} \iiint_W y \cdot \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(W)} \iiint_W z \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Def: Centre geomètric CG

En el cas en que prenem la densitat constant, p.ex. $\rho \equiv 1$, llavors el centre de masses ens dona en cada cas el centre geomètic del domini.

- Exemple: Calcular el centre de masses del cilindre de base circular $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq R^2, \ 0 \leq z \leq h\}$ si la seva densitat $\boxed{\rho(x,y,z) = kz}$ és proporcional a la distància a la seva base $z=0$.

- Degut a la simetria tant del domini W com de la densitat ρ, és clar que el $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = CM(W)$ és sobre l'eix z: $\bar{x} = \bar{y} = 0$. A més:

$$\bar{z} = \frac{1}{m(W)} \iiint_W z\,\rho(x,y,z) = \frac{\frac{k}{3}\pi h^3 R^3}{\frac{k}{2}\pi h^2 R^2} = \frac{2}{3} h .$$ En efecte:

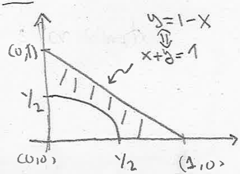
- Usem coord. cilíndriques $\{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z\}$ per les integrals i que W en cilíndriques és $W^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq h\}$:

- $m(W) = \iiint_W \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} kz \cdot r\,dr\,dz\,d\theta = k\left(\int_0^R r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^h z\,dz\right) =$

$$= k\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=h} = \frac{k}{2}\pi h^2 R^2$$

- $\iiint_W z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} k z^2 r\,dr\,dz\,d\theta = k\left(\int_0^R r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^h z^2\,dz\right) = \frac{k}{3}\pi h^3 R^2.$

- <u>Exemple</u>: Calculeu el centre geomètric del domini $\boxed{D = T \setminus C_1}$ de $\mathbb{R}^2$, definit pel triangle T de vèrtexs en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, al que li traiem un quart de disc de centre $(0,0)$ i radi $1/2$ $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{1}{4},\ x,y \geq 0\}$



- Per simetria de D, és clar $(\bar{x},\bar{y}) = CG(D)$ compleix $\bar{x} = \bar{y}$.

- $$\bar{x} = \frac{1}{\text{Àrea}(D)} \iint_D x\,dx\,dy = \frac{2}{8-\pi},\ \text{on:}$$

- $$\text{Àrea}(D) = \text{Àrea}(T) - \text{Àrea}(D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16} = \frac{8-\pi}{16}.$$

- $$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_T x\,dx\,dy - \iint_{C_1} x\,dx\,dy = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

- $$\iint_T x\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\,dy\right) dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

- $$\iint_{C_1} x\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polars}}}{=} \int_0^{1/2}\left(\int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)\cdot r\,d\theta\right)dr = \left(\int_0^{1/2} r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\right)d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1/2} \cdot [\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{24}$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $C_1^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1/2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$

- Centre de masses unió dos dominis

- Si volem calcular $CM(A \cup B)$ on $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ són dos dominis disjunts (separats), aleshores podem calcular separadament $CM(A)$ i $CM(B)$ i després calcular $CM(A \cup B)$ com el centre de masses de dos punts, $CM(A)$ i $CM(B)$, entenent que tota la massa de A i B està concentrada en cadascun d'ells, respectivament. Això és:

$$CM(A \cup B) = \frac{m(A) \cdot CM(A) + m(B) \cdot CM(B)}{m(A) + m(B)}$$

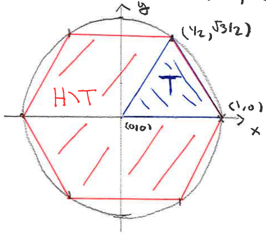
- Si el que volem és el centre geomètric $CG(A \cup B)$, canviem en la fórmula CM per CG arreu i $m(\cdot)$ per Àrea$(\cdot)$ ó Volum$(\cdot)$ segons el cas.

- Centre de masses d'un domini amb forats

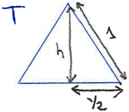
- Si volem calcular $CM(A \setminus B)$ on A és un domini de $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ i ara B és una porció de A que eliminem ("fem un forat en A") podem adaptar la fórmula anterior per obtenir:

$$CM(A \setminus B) = \frac{m(A) \cdot CM(A) - m(B) \cdot CM(B)}{m(A) - m(B)}$$ (ídem pel $CG(A \setminus B)$)

- Exemple: H hexàgon regular de $\mathbb{R}^2$ centrat en $(0,0)$ inscrit dins la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 1, de forma que H té 2 vèrtexs consecutius en els punts $(1,0)$ i $(1/2, \sqrt{3}/2)$ (cada costat de H té longitud igual a la del radi 1 de la circumferència). Sigui T el triangle equilàter que té vèrtexs en $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Calculem $CG(H \setminus T)$.



- $CG(H) = (0,0)$
- $CG(T) = \frac{1}{3}\left[(0,0) + (1,0) + (1/2, \sqrt{3}/2)\right] = (1/2, \sqrt{3}/6)$
- $\text{Àrea}\,(T) = \dfrac{1 \cdot h}{2} = \sqrt{3}/4$
- $\text{Àrea}\,(H) = 6 \cdot \text{Àrea}\,(T) = 6 \cdot \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2$



$$h^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$
$$h^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$
$$h = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

- Finalment:

$$CG(H \setminus T) = \frac{\text{Àrea}(H) \cdot CG(H) - \text{Àrea}(T) \cdot CG(T)}{\text{Àrea}(H) - \text{Àrea}(T)}$$

Per tant:

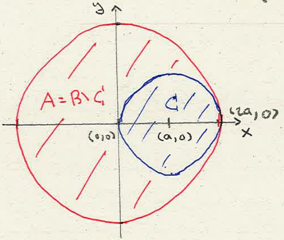
$$CG(H \setminus T) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (0,0) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{24}(3, \sqrt{3})}{5\sqrt{3}/2} = -\frac{(3, \sqrt{3})}{60}$$

- Exemple: Calculem $CG(A)$ on:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2, \ (x-a)^2+y^2+z^2 \geq a^2\} \quad (a>0)$$

- clarament $A = B \setminus C$ on $B = \overline{B}_{2a}((0,0,0))$ és la bola tancada de centre $(0,0,0)$ i radi $2a$ i $C = \overline{B}_a((a,0,0))$ bola tancada de centre $(a,0,0)$ i radi a.

Per tant A s'obté fent girar entorn de l'eix X la figura plana següent:



G

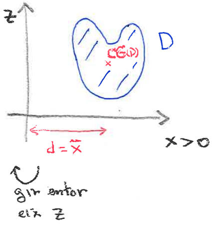
- Per simetria $CG(A) = (\bar{x},0,0)$ (ho veurem en calcular-lo)
- $CG(B) = (0,0,0)$
- $CG(C) = (a,0,0)$
- $\text{Volum}(B) = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$
- $\text{Volum}(C) = \frac{4}{3}\pi a^3$

Així:

$$CG(A) = CG(B\setminus C) = \frac{\text{Volum}(B)\cdot CG(B) - \text{Volum}(C)\cdot CG(C)}{\text{Volum}(B) - \text{Volum}(C)}$$

$$= \frac{\frac{32}{3}\pi a^3 \cdot (0,0,0) - \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot (a,0,0)}{\frac{32}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3} = -\frac{(a,0,0)}{8-1} = -\frac{(a,0,0)}{7}$$

· Segon Teorema de Pappus-Guldin



· D domini pla contingut en el semi-pla $\{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$

· $W \subset \mathbb{R}^3$ domini sòlid que s'obté fent giran D entorn eix Z.

· $d = \overline{x} = \dfrac{1}{\text{Àrea}(D)} \iint_D x \, dx \, dz$ – Coordenada x del CG(D) o, equivalentment, distància del CG(D) a l'eix Z

Llavors:

$$\boxed{\text{Volum}(W) = 2\pi \cdot \overline{x} \cdot \text{Àrea}(D) = 2\pi \iint_D x \, dx \, dz}$$

- Opcions pràctiques:

(1) $\text{Volum}(W) = 2\pi \cdot \overline{x} \cdot \text{Àrea}(D)$ si veiem $\overline{x}$ a vista (cal calcular Àrea (D)).

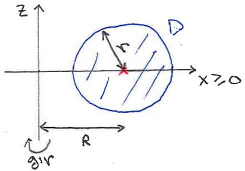
(2) $\text{Volum}(W) = 2\pi \iint_D x \, dx \, dz$ si no veiem $\overline{x}$ a vista (no cal calcular Àrea (D))

(3) $\overline{x} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{\text{Volum}(W)}{\text{Àrea}(D)}$ si sabem calcular fàcilment Volum (W) i Àrea (D).

- Comentari: El resultat és cert si $W \subset \mathbb{R}^3$ domini sòlid obtingut girant un domini pla D entorn d'un eix $\vec{r}$ contingut en el mateix pla que D i que no talla D. Llavors:

$$\text{Volum}(W) = 2\pi \cdot \text{dist}(\vec{r}, CG(D)) \cdot \text{Àrea}(D)$$

· Exemple: Volum tor W ("dònut sòlid") obtingut girant un disc D de radi r i centre $(x,z)=(R,0)$, $0<r\le R$, contingut en el semi-plà $\{x\ge 0, y=0, z\in\mathbb{R}\}$ entorn l'eix $\vec{OZ}$.

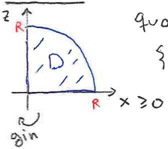


· $(\bar{x},\bar{z}) = CG(D) = (R,0) \Rightarrow \bar{x} = R$

· Àrea $(D) = \pi r^2$

· Volum $(W) = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot$ Àrea $(D) = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$ (Pappus - Guldin)

· Exemple: Calculem $(\bar{x},\bar{z}) = CG(D)$ on $D=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+z^2\le R^2,\ x,z\ge 0\}$ és un quart de disc de centre $(0,0)$ i radi $R>0$ contingut en el semi-plà $\{x\ge 0, y=0, z\in\mathbb{R}\}$.



· És clar, per simetria, que $\bar{x}=\bar{z}$

· El sòlid $W\subset\mathbb{R}^3$ que s'obté en girar D entorn l'eix $\vec{OZ}$ és el hemisferi nord de la bola $\bar{B}^3_R((0,0,0))$ de $\mathbb{R}^3$

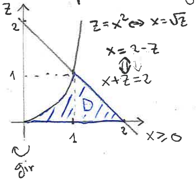
· Àrea $(D) = \frac{1}{4}$ Àrea $(B^2_R(0,0)) = \frac{1}{4}(\pi R^2)$

· Volum $(W) = \frac{1}{2}$ Volum $(B^3_R(0,0,0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$

· Per Pappus - Guldin:

$$\bar{x} = \bar{z} = d(\vec{OZ}, CG(D)) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\text{Volum}(W)}{\text{Àrea}(D)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)}{\left(\frac{1}{4}\pi R^2\right)} = \frac{4R}{3\pi}$$

- **Problema 31**: Calculeu el volum de $W \subset \mathbb{R}^3$ on W s'obté girant entorn de l'eix Z el domini pla contingut en el semi-pla, $x \geq 0$, $y=0$, $z \in \mathbb{R}$, definit per



$$D=\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z \leq x^2,\ x+z \leq 2,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$$

- Denotem per $\bar{x}$ la coordenada x del $CG(D)$ (domini que girem) i observem $\bar{x} = \text{dist}(\vec{oz}, CG(D))$. Llavors, pel 2on. T^a de Pappus-Guldin el volum de W (domini que obtenim en giran D) és:

$$\text{Volum}(W) = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot \text{Àrea}(D) = 2\pi \left(\frac{1}{\text{Àrea}(D)} \iint_D x\,dx\,dz \right) \text{Àrea}(D) = 2\pi \iint_D x\,dx\,dz$$

(no cal calcular Àrea (D))

- El punt de tall de la recta $x+z=2$ i la paràbola $z=x^2$ s'obté igualant z: $x-2=z=x^2$, obtenint l'equació $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ i $x=-2$ (només volem $x \geq 0$) $\Rightarrow$ és $(x,z)=(1,1)$.
- El domini D és Z-elemental: $D=\{0 \leq z \leq 1,\ \sqrt{z} \leq x \leq 2-z\}$. Per Fubini:

$$\iint_D x\,dx\,dz = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{z}}^{2-z} x\,dx \right) dz = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\sqrt{z}}^{x=2-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(2-z)^2-(\sqrt{z})^2\right] dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[4-4z+z^2-z\right] dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4z - \frac{5}{2}z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{2}\left[4-\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{12}$$

- Per tant: $\text{Volum}(W) = 2\pi \iint_D x\,dx\,dz = 2\pi \cdot \frac{11}{12} = \frac{11\pi}{6}$

- Def: Moment d'inèrcia

(II) $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ densitat superficial de massa en D. El seu moment d'inèrcia I_r respecte d'un eix / recta r de $\mathbb{R}^2$ és:

$$I_r = \iint_D [d((x,y),r)]^2 \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy$$

En particular, pels eixos x, y de $\mathbb{R}^2$ es té:

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy; \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

(III) $\rho: W \subset \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ densitat de massa en W. El seu moment d'inèrcia I_r respecte d'un eix / recta r de $\mathbb{R}^3$ és:

$$I_r = \iiint_W [d((x,y,z),r)]^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

En particular, pels eixos x, y, z de $\mathbb{R}$ es té:

$$I_x = \iiint_W (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad I_y = \iiint_W (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

· <u>Exemple</u>: Calculeu el moment d'inèrcia I_z per la bola unitat $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ si la seva densitat de massa és $\rho(x,y,z) = K \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (proporcional a la distància al centre).

· Usem coord. esfèriques $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\cos\varphi\sin\theta$, $z = r\sin\varphi$ i que B en esfèriques és $B^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

· Observem: $x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi$ (recordem Jacobià esfèriques $= r^2\cos\varphi$)

$x^2+y^2+z^2 = r^2$.

$$\cdot\ I_z = \iiint_B (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{B^*} (r^2\cos^2\varphi)\cdot(K\cdot r)\,(r^2\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= K\left(\int_0^1 r^5\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi\right) = K\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1}\cdot 2\pi\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\cdot\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{K\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\varphi - \sin^2\varphi\cdot\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{K\pi}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} = \frac{2K\pi}{3}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{9}K\pi.$$

· Observem que, per simetria: $I_x = I_y = I_z = \frac{4}{9}K\pi$

• Exemple: Calculem I_z per $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ si $\rho(x,y,z) = 1$.

• Usem coord. esfèriques adaptades a l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$:

$x = a \cdot r \cdot \cos\varphi \cos\theta$, $y = b \cdot r \cdot \cos\varphi \sin\theta$, $z = c \cdot r \cdot \sin\varphi$, jacobià $= abc\, r^2 \cos\varphi$

• W en aquestes coord. es deve: $W^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

ja que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$.

• A més, $x^2 + y^2 = (a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)\, r^2 \cos^2\varphi$.

• $I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W^*} (a^2\cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta)\, r^2 \cos^2\varphi\; abc\, r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$= abc \underbrace{\left(\int_0^1 r^4\, dr\right)}_{= 1/5} \underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi\right)}_{= 4/3} \cdot \left\{ a^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta}_{= \pi} + b^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta}_{= \pi} \right\} = \frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+b^2)$

on: $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi$, $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \cdots = \pi$.

• observem que, per simetria:

$I_x = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2+c^2)$, $I_y = \frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+c^2)$. (Si $a=b=c=1$ tots valen $8\pi/15$)

- Exemple: Calcular I_z per $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq 1\}$ si $\rho(x,y,z) = 1$.

- Coord. esfèriques desplaçades i amb jacobià $= r^2 \cos\varphi$:

$x = a + r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = b + r\cos\varphi\sin\theta, \quad z = c + r\sin\varphi$.

- W en aquestes coords esdevé: $W^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

- $x^2 + y^2 = (a + r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (b + r\cos\varphi\sin\theta)^2 = (a^2+b^2) + 2r\cos\varphi(a\cos\theta + b\sin\theta) +$
$+ r^2\cos^2\varphi$

- $$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = (a^2+b^2)\iiint_{W^*} r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi + \iiint_{W^*} r^2\cos^2\varphi\, r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$
$$+ 2\iiint_{W^*} r\cos\varphi(a\cos\theta + b\sin\theta)\,r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = (a^2+b^2)\frac{4}{3}\pi + \frac{8\pi}{15}.$$

On:

$$\iiint_{W^*} r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right) = \frac{4}{3}\pi = \text{Volum}(W)$$

$$\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b\sin\theta)\,d\theta = a\left[\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + b\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

$$\iiint_{W^*} r^4\cos^3\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \left(\int_0^1 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi\right) = \frac{8\pi}{15}$$

- Per simetria: $I_x = (b^2+c^2)\frac{4}{3}\pi + \frac{8\pi}{15}$, $I_y = (a+c^2)\frac{4}{3}\pi + 8\pi/15$.

• Exemple: Calculeu I_r per $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ i $\rho(x,y,z)=1$, on r recta paral·lela a l'eix Z per $(c,0,0)$.

• Usem coord. esfèriques $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\cos\varphi\sin\theta$, $z = r\sin\varphi$, Jacobià $= r^2\cos\varphi$.

• W en esfèriques és $W^* = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}$.

• $$(d(r,(x,y,z)))^2 = (x-c)^2 + y^2 = [r\cos\varphi\cos\theta - c]^2 + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta = c^2 - 2cr\cos\varphi\cos\theta + r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta = c^2 - 2cr\cos\varphi\cos\theta + r^2\cos^2\varphi$$

• $$I_r = \iiint_W (d(r,(x,y,z)))^2\,dx\,dy\,dz = c^2 \underbrace{\iiint_W dx\,dy\,dz}_{\text{Volum}(W)} - 2c\iiint_{W^*} r^3\cos^2\varphi\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi + \iiint_{W^*} r^4\cos^3\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = c^2\frac{4}{3}\pi - 2c\left(\int_0^1 r^3dr\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)}_{=0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi\right) + \underbrace{\left(\int_0^1 r^4dr\right)}_{=1/5}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)}_{=2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi\right)}_{=4/3} = \frac{4}{3}c^2\pi + \frac{8}{15}\pi.$$

Teorema de Steiner

El moment d'inèrcia del cos $W \subset \mathbb{R}^3$ respecte de l'eix r és la suma del moment d'inèrcia de W respecte de l'eix S paral·lel a r que passa pel centre de masses $CM(W)$ de W i del moment d'inèrcia que tindria W si tota la seva massa $m(W)$ estigués concentrada en $CM(W)$

$$I_r = I_s + m(W)\cdot\left[d\left(CM(W), r\right)\right]^2$$

· Exemple: Calculeu I_r per $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ i $\rho(x,y,z)=1$, on r recta paral·lela a l'eix Z per $(c,0,0)$. [exemple anterior]

· $CM(W) = (0,0,0)$, $m(W) = \text{Volum}(W) = \frac{4}{3}\pi$, S = eix Z (pel $(0,0,0)$)

· Fent $a=b=c=1$ en l'exemple de l'el·lipse obtenim: $I_Z = \frac{8}{15}\pi$

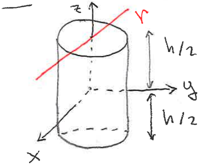
· Pel Teorema de Steiner:

$$I_r = I_Z + m(W)\cdot\left[d((0,0,0), r)\right]^2 = \frac{8}{15}\pi + \frac{4}{3}\pi\cdot|c|^2 =$$

· <u>Exemple</u>: Calculeu I_r pel cilindre circular d'eix z, radi R i altura h

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le R^2, -h/2 \le z \le h/2\}$ amb densitat de masses

$\rho(x,y,z) = 1$, on r eix paral·lel a l'eix X pel punt $(0,0,h/2)$



· $CM(W) = CG(W) = (0,0,0)$ } ja que $\rho \equiv$ const. $= 1$

· $m(W) = \text{volum}(W) = \pi R^2 h$

· $S \equiv$ eix X (paral·lel r pel $CM(W)$), $d(CM(W), r) = h/2$.

· Usem coord. cilíndriques $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, Jacobià $= r$, per calcular I_S, usant que W en cilíndriques és $W^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi, -h/2 \le z \le h/2\}$

· $(d(S,(x,y,z)))^2 = y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\theta + z^2$

· $$I_S = \iiint_W (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} r^3 \sin^2\theta \,dr\,d\theta\,dz + \iiint_{W^*} z^2 r\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^R r^3 dr\right)}_{= R^4/4} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta\right)}_{= \pi} \underbrace{\left(\int_{-h/2}^{h/2} dz\right)}_{= h} + \underbrace{\left(\int_0^R r\,dr\right)}_{= R^2/2} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{= 2\pi} \underbrace{\left(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz\right)}_{= \frac{1}{12} h^3} = \frac{\pi}{4} R^4 h + \frac{\pi}{12} R^2 h^3$$

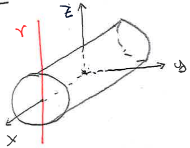
· Per Steiner:

$$I_r = I_S + m(W)\left[d(CM(W), r)\right]^2 = \frac{\pi}{4} R^2 h + \frac{\pi}{12} R^2 h^3 + \pi R^2 h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} R^2 h + \frac{\pi}{3} R^2 h^3.$$

· Exemple: Calculeu I_r pel cilindre circular d'eix X, radi R i altura h

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq R^2, -h/2 \leq x \leq h/2\}$ amb densitat de massa $\rho = 1$,

on r eix paral·lel a l'eix Z pel punt $h/2$.



· No és més que el càlcul simètric a l'anterior però considerant el cilindre restrivat, un eix r ortogonal a l'eix pel centre d'una cara de W. El resultat per I_r és el mateix que abans.

· Si ara però féssim els càlculs des de zero, el natural és considerar coord. cilíndriques (r, θ, X) adaptades a l'eix $\hat{X}$, de la forma:

$X = x, \; y = r\cos\theta, \; z = r\sin\theta$, $\quad |\text{Jacobià}| = r$.

El cilindre W en aquestes coordenades es deve:

$$W^* = \{(r,\theta,X) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distància a} \\ \text{l'eix } X}}{r} \leq R, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi, \; -h/2 \leq X \leq h/2\}$$