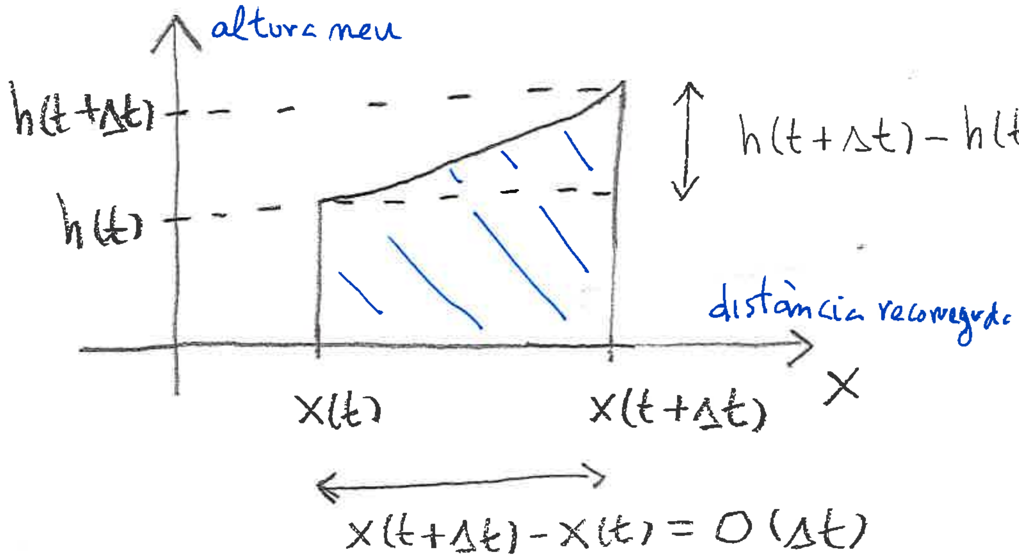
Problema 19: Està nevant amb regularitat. A les 12h surt una màquina llevaneus que avança 2Km en la 1a. hora i 1Km en la 2a. A quina hora ha començat a nevar? (suposem que la quantitat de neu treta per la màquina per unitat de temps és constant).

- Entenem doncs que la màquina pot desplaçar un volum de neu constant per unitat de temps. Com que l'amplada de la pala de la màquina és la que és, aquest volum ve donat per l'àrea ocupada per la neu si fem una secció longitudinal en la direcció del moviment de la màquina que, a falta de més informació, suposem que segueix una trajectòria recta.
- Denotem per $t_0 \leq 12$ l'instant de temps (en hores) en que ha començat a nevar. Entenem que abans no hi havia neu.
- $h(t) = K \cdot (t - t_0)$ és l'altura de la neu en l'instant $t \geq t_0$, on K és una constant que depèn de la intensitat de la nevada.
- $x(t)$ distància recorreguda (en Km) per la màquina si $t \geq 12$.

• Les dades inicials són: $x(12)=0$, $x(13)=2$, $x(14)=3$.



• Fixem un $t \geq t_0$ i triem $\Delta t > 0$ petit

• Podem identificar l'àrea de la regió (\\\\\\) amb la quantitat de neu treta per la màquina entre els instants t i $t+\Delta t$.

• observem que si, a priori, presuposem que $x(t)$ serà una funció almenys C^1 en t, llavors $x(t+\Delta t)-x(t)$ és d'ordre Δt. Això vol dir $|x(t+\Delta t)-x(t)| \leq \text{const.}\, \Delta t$. Clarament, $h(t+\Delta t)-h(t)=O(\Delta t)$.

• L'àrea de la regió (\\\\\\) és igual a l'àrea del rectangle de base $x(t+\Delta t)-x(t)$ i altura $h(t)$, més un petit excés que és difícil de calcular però que és menor que l'àrea del rectangle de base $x(t+\Delta t)-x(t)=O(\Delta t)$ i altura $K\cdot\Delta t$. Per tant, l'àrea d'aquest petit excés és d'ordre $O(\Delta t^2)$.

• Per tant, la igualtat "quantitat de neu treta per unitat de temps és constant" ens diu que:

$$(x(t+\Delta t) - x(t))\cdot h(t) + O(\Delta t^2) = Q\cdot \Delta t$$

per una certa constant $Q>0$. Dividint per Δt:

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\cdot h(t) + O(\Delta t) = Q$$

Fent $\Delta t \to 0^+$: $x'(t)\cdot h(t) = Q \Rightarrow x'(t) = \frac{Q}{K\cdot(t-t_0)} = \frac{M}{t-t_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = M\cdot \ln(t-t_0) + C$, per unes certes constants $M>0$ i $t_0 \leq 12$.

Llavors, fent $t = 12, 13, 14$:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x(12) = M\ln(12-t_0)+C \\ 2 = x(13) = M\ln(13-t_0)+C \\ 3 = x(14) = M\ln(14-t_0)+C \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{a 2a., 3a}]{\text{Restem 1a.}} \left\{\begin{array}{l} M\ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right) = 2 \\ M\ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right) = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{quocient}]{\text{Fem}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)}{\ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)} \Rightarrow \ln\left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)^2 = \ln\left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{14-t_0}{12-t_0}\right)^2 = \left(\frac{13-t_0}{12-t_0}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0^2 - 25t_0 + 155 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{25\pm\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} - \ \boxed{11.38h} & \text{hora en que ha començat nevar!} \\ + \ 13.6h & (\text{és} > 12h) \end{cases}$$