Càlcul 2: Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs) de Primer Ordre

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

26 d'Octubre de 2021

Definició (EDOs de primer ordre)

Una equació diferencial ordinària (EDO) de primer ordre en forma normal pren la forma:

$$y' = h(x, y)$$

- $x \in \mathbb{R}$ *és la variable independent,* $\quad ' = \dfrac{d}{dx}$
- $y = y(x)$ *és la funció incògnita.*
- $h(x, y)$ *funció de dos variables donada (la que defineix l'equació).*

Definició (Solució d'una EDO)

Direm que $y = y(x)$ *és una solució (particular) de* $y' = h(x, y)$ *si* $y(x)$ *és una funció definida* $\forall x \in I$ *(* I *interval de* $\mathbb{R}$ *) i tal que:*

$$y'(x) = h(x, y(x)), \quad \forall x \in I.$$

Exemple

- **Càlcul de les primitives d'una funció $f(x)$ donada:** $\boxed{y' = f(x)}$

Busquem funcions $y = y(x)$ tals que la seva derivada sigui $f(x)$.
Tota primitiva $y(x)$ de $f(x)$ és solució particular d'aquesta EDO.

- **Creixement malthusià:** $\boxed{y' = r \cdot y}$
  - $y(x)$ *modela l'evolució temporal d'una població suposant recursos disponibles il·limitats (la variable independent x és el temps).*
  - $r > 0$ *és la taxa de creixement de la població.*
  - $y(x) = \mathrm{e}^{r \cdot x}$ *n'és una solució particular.*

- **L'equació logística:** $\boxed{y' = r \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{K}\right)}$
  - $y(x)$ *modela l'evolució temporal d'una població quan els recursos són finits (de nou x és el temps).*
  - $r > 0$ *taxa de creixement "natural";* $K > 0$ *depèn dels recursos.*
  - $y(x) = K$ *n'és una solució (constant / d'equilibri) particular.*

Definició (Tipus de solucions d'una EDO)

1. **Solucions explícites:** *Quan coneixem l'expressió de la solució com a funció de la variable independent ("fórmula per la solució").*
2. **Solucions implícites:** *La solució està definida mitjançant una equació que involucra la funció incògnita i la variable independent.*

Exemple

• $y(x) = 5\tan(5x)$, *definida per* $x \in I = \left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$, *és una solució explícita de* $y' = 25 + y^2$. *En efecte:*

$$y'(x) = 5\left(1 + \tan^2(5x)\right) \cdot 5 = 25 + (5\tan(5x))^2 = 25 + (y(x))^2.$$

• *L'equació* $x^2 + y^2 = 2$ *defineix de forma implícita dues solucions de l'EDO* $y' = -x/y$ *que, en aquest cas, podem donar també de forma explícita:* $y_1(x) = +\sqrt{2 - x^2}$, $y_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}$, $x \in I = (-5, 5)$. *En efecte, si en la relació* $x^2 + y^2 = 2$ *entenem que* $y = y(x)$, *i la derivem implícitament respecte de* x, *s'obté:*

$$x^2 + y^2 = 2 \implies 2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

Comentari

- *Les solucions d'una EDO de 1er. ordre no són funcions aïllades, sinó que formen una familia dependent d'un paràmetre / constant.*
- *Anomenarem* **solució general** *d'una EDO a aquella familia de solucions que contingui* **totes les solucions** *de l'equació.*
- *Només en exemples molt senzills és possible calcular la solució general d'una EDO donada que, en molts casos, ve donada de forma implícita i/o per "quadratures" (quan la solució depèn del càlcul de primitives que potser no sabem calcular).*

Exemple

• **Primitives de** $f(x)$. *La solució general (explícita i per quadratures) de* $y' = f(x)$ *és:* $y(x;c) = c + \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. *(*$c \in \mathbb{R}$ *const. d'integració.)*
• $y(x;c) = c \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$ *és la solució general explícita de l'EDO* $y' = r \cdot y$.
($c \in \mathbb{R}$ *és una constant qualsevol.)*
• $x^2 + y^2 = c$ *defineix una familia implícita de solucions de l'EDO* $y' = -x/y$. *(*$c > 0$ *constant qualsevol.)*

Comentari

- *La forma usual de determinar una solució particular concreta d'una EDO és donar* **condicions inicials (c. i.)** *i resoldre el corresponent* **problema de valors incials (PVI)***.*
- *Si coneixem la solució general d'una EDO de 1er. ordre, definida mitjançant una familia de solucions que depèn d'una constant c, resoldre un* **PVI** *ens permet determinar aquell/s valors concrets de $c \in \mathbb{R}$ que defineixen una o més solucions verificant les* **c. i.***'s.*

Definició (Problema de valors inicials per EDOs de 1er. ordre)

Donada l'EDO $y' = h(x, y)$ i **c. i.** *$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, el* **PVI** *associat consisteix en buscar $y(x)$ solució de l'EDO tal que $y(x_0) = y_0$.*

Teorema (d'existència i unicitat de solucions)

Si $h(x, y)$ és almenys de classe C^1 en un obert $W \subset \mathbb{R}^2$ i triem **c. i.** *$(x_0, y_0) \in W$, llavors el* **PVI** *associat té una única solució local $y(x)$. ($y(x)$ està definida en un cert interval obert $I \subset \mathbb{R}$ entorn de x_0, el tamany del qual depèn tan de l'EDO com del PVI i que, en alguns casos, pot ser "petit" fins i tot si l'EDO està ben definida $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.)*

Exemple

• *La solució general de l'EDO* $y' = 1 + y^2$ *és* $y(x; c) = \tan(x + c)$, $\forall c \in [0, 2\pi)$. *Si considerem el PVI* $y(0) = 0$ *per aquesta EDO, llavors cal triar* $c = 0$ *i s'obté la solució* $y(x) = \tan(x)$, $\forall x \in I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Per tant,* I *és l'interval maximal de definició de la solució d'aquest PVI malgrat la funció* $h(x, y) = 1 + y^2$ *que defineix la EDO és* C^∞ *en* $\mathbb{R}^2$.

• *La solució general de l'equació logística* $y' = r \cdot y \cdot \left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ *és* $y(x; c) = \dfrac{c\,K\,\mathrm{e}^{r \cdot x}}{K + c\,\mathrm{e}^{r \cdot x}}$. *Si* y_0 *és el nombre d'individus de la població y quan* $x = 0$, *llavors l'evolució al llarg del temps d'aquesta població (segons aquest model) ve donada per la solució del PVI* $y(0) = y_0$. *El valor de* c *que cal triar per resoldre aquest PVI ve donat per l'equació:*

$$y_0 = y(0; c) = \frac{c\,K}{K + c} \implies c = \frac{y_0}{1 - y_0/K}.$$

Per tant, la solució del PVI $y(0) = y_0$ *és* $y(x) = \dfrac{K \cdot y(0) \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}}{K + y(0) \cdot (\mathrm{e}^{r \cdot x} - 1)}$, *que verifica* $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = K$ *(població límit en terme dels recursos).*

QUADRE RESUM DE LES EDOs DE PRIMER ORDRE QUE ESTUDIEM I LA SEVA SOLUCIÓ

EDO	Tipus	Solució general	Solució del PVI
$y' = f(x)$	Càlcul de primitiva	$y(x) = F(x) + c$	$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
$g(y)y' = f(x)$	EDO separable	$G(y) = F(x) + c$ (en forma implícita)	$\int_{y_0}^{y} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (en forma implícita)
$y' = a(x)y$	EDO lineal homogénea	$y_{\mathrm{h}}(x) = c\mathrm{e}^{A(x)}$	$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)$
$y' = a(x)y + b(x)$	EDO lineal no homogènia	$y_{\mathrm{g}}(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$ $y_{\mathrm{p}}(x) = V(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ $V(x) = \int \mathrm{e}^{-A(x)} b(x)\,\mathrm{d}x$	Es determina $c \in \mathbb{R}$ imposant la c. i. $y(x_0) = y_0$
$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ amb $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	EDO exacta	$U(x,y) = c$ on $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ (en forma implícita)	$U(x,y) = U(x_0, y_0)$ (en forma implícita)

TAULA 2. Les EDOs de primer ordre més simples i les seves solucions. Les funcions $F(x)$, $G(y)$ i $A(x)$ són primitives arbitràries de les funcions $f(x)$, $g(y)$ i $a(x)$.

Comentari

Les integrals que apareixen en les fórmules per resoldre les EDOs considerades indiquen primitives qualsevol de la funció involucrada, que hem de calcular **sense cap constant d'integració**. *La constant que es requereix en cada cas ja s'explícita en la formula. Per exemple:*

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x).$$

Definició (EDOs separables $\boxed{g(y) \cdot y' = f(x)}$)

Són aquelles en que la funció $h(x, y)$ *que defineix l'EDO és producte d'una funció de* x *per una funció de* y. *Per tant, una EDO seprable sempre la podem escriure com* $g(y) \cdot y' = f(x)$.

L'expressió següent definieix una familia implícita de solucions (per quadratures) de l'EDO (però no sempre la seva solució general):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \implies \boxed{\int g(y)\, dy = \int f(x) dx + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}}$$

- Exemple 1: Troben una família de solucions explícites de l'edo separable següent i resolen el P.V.I. que s'indica:

$$y \cdot y' + (1+y^2) \cdot \sin x = 0, \qquad y(0) = 1.$$

L'expressem com: $y \dfrac{dy}{dx} = -(1+y^2)\sin x \Longleftrightarrow \dfrac{y}{1+y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

i la resolem com a edo separable que és:

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = -\int \sin x \, dx + C \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos x + C}_{\text{família implícita solucions}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+y^2) = 2\cos x + 2C \Rightarrow 1+y^2 = e^{2\cos x + 2C} \Rightarrow \underbrace{y(x;C) = \pm\sqrt{e^{2\cos x + 2C} - 1}}_{\text{família explícita}}$$

· Resoldre el P.V.I. vol dir trobar el valor / valors de C (i en aquest cas també el signe $\pm$) que fa que $y(x) = y(x;C)$ verifiqui $y(0) = 1 > 0$. Clarament doncs, cal triar el signe $+$. Atenció: El valor de C millor calcular-lo via la relació implícita i no pas via la explícita!

En efecte: $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos x + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) = 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln(2) - 1$

Fem: $x=0$
$y=1$

Finalment, la solució del PVI és: $y(x) = +\sqrt{e^{2\cos x + \ln 2 - 2} - 1} = \sqrt{2e^{2(\cos x - 1)} - 1}$

-Exemple 2: Trobeu l'expressió implícita de la solució del PVI $\begin{cases} y' = 1 + \frac{1}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{y^2} \Rightarrow \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = \int dx + c \Rightarrow \underbrace{y - \arctan(y) = x + c}_{\text{família implícita solucions}}$$

on hem usat:

$$\frac{y^2}{1+y^2} = \frac{(y^2+1)-1}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = y - \arctan(y)$$

Per tant, fent $x=0$, $y=1$ en la relació implícita obtinguda:

$1 - \arctan(1) = c \Rightarrow c = 1 - \pi/4$.

obtenim la solució implícita: $y - \arctan(y) = x + 1 - \pi/4$

- <u>Exemple 3</u> : Ídem que en l'exemple 1 per PVI: $\begin{cases} e^{-y}\cdot(1+y')=1 \\ y(0)=\ln 2 \end{cases}$

$$e^{-y}\frac{dy}{dx}=1-e^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{y}-1 \Rightarrow \int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int dx + C_1$$

Fem el canvi de variable $u=e^{y}$, $du=e^{y}dy=u\,dy$ en la integral:

$$\int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int\frac{du}{(u-1)u}=\int\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}\right)du=-\ln|u|+\ln|u-1|=\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right| \quad , \text{ on hem descompòsat en fraccions simples:}$$

$$\frac{1}{(u-1)u}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1} \Leftrightarrow 1=A(u-1)+B\cdot u \begin{cases} \text{Fent } u=0 \Rightarrow 1=A\cdot(-1) \Rightarrow A=-1 \\ \text{Fent } u=1 \Rightarrow 1=B \end{cases}$$

Hem obtingut doncs la família implícita de solucions: (*)

$$\ln\left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right|=x+C_1 \Rightarrow \left|\frac{e^{y}-1}{e^{y}}\right|=\underbrace{e^{C_1}}_{>0}\cdot e^{x} \Rightarrow \overbrace{\frac{e^{y}-1}{e^{y}}=c\cdot e^{x}}^{(*)} \Rightarrow$$

Treiem el valor absolut permetent que $c=e^{C_1}$ pugui ser també ≤ 0 ($c=0$ també dóna solució)

$$\Rightarrow e^{y}(1-ce^{x})=1$$

$$\Rightarrow y(x;c)=\ln\left(\frac{1}{1-ce^{x}}\right) \text{ família explícita.}$$

Fent $x=0$, $y=\ln 2$ en (*) obtenim: $c=1/2 \Rightarrow y(x)=\ln\left(\frac{2}{2-e^{x}}\right)$ solució PVI

Problema 3: El model de Verhulst per a una població està basat en l'edo logística $y' = a\cdot y - by^2$, $a, b > 0$. Concretament, si $y(t)$ és el nombre d'individus en l'instant t, l'expressem com:

$$y' = r\cdot\left(1 - \frac{y}{K}\right)\cdot y, \quad (*) \qquad \left(y' = dy/dt\right)$$

On: $r > 0$ és el paràmetre que modela el creixement natural de la població segons la llei de Malthus (suposant recursos il·limitats) i $K > 0$ depèn dels recursos disponibles (com veurem, de fet K és el topall de població que podem sostenir amb els recursos disponibles).

(a) Trobeu una expressió explícita per la solució general de l'edo separable $(*)$.

$$\int \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y} = \int r\, dt + c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{1 - y/K}\right| = rt + c_1 \Rightarrow \left|\frac{y}{1 - y/K}\right| = \underbrace{e^{c_1}}_{c>0} \cdot e^{rt}$$

Treiem el valor absolut, permetent que c pugui pendre valors arbitraris en $\mathbb{R}$ ($c = 0$ dóna la solució $y \equiv 0$)

obtenim: $\frac{y}{1-y/K} = ce^{rt} \Rightarrow y = ce^{rt} - \frac{c}{K} e^{rt} y \Rightarrow \left(1+\frac{c}{K}e^{rt}\right) y = ce^{rt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{c\, e^{rt}}{1+ce^{rt}/K} = \frac{cKe^{rt}}{K+ce^{rt}}, \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

· Detalls càlcul integral via descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{K}\right)\cdot y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y/K} \Leftrightarrow 1 = A\cdot\left(1-\frac{y}{K}\right) + By \quad \begin{cases} \text{Fent } y=0 \Rightarrow A=1 \\ \text{Fent } y=K \Rightarrow B=1/K \end{cases}$$

Així:

$$\int \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{\left(-\frac{1}{K}\right)dy}{1-y/K} = \ln|y| - \ln\left|1-\frac{y}{K}\right| = \ln\left|\frac{y}{1-y/K}\right|$$

(b) Usem el resultat de (a) per resoldre el P.V.I. $y(0)=y_0$.

Fent $t=0$, $y=y_0$ en $\frac{y}{1-y/K} = ce^{rt} \Rightarrow c = \frac{y_0}{1-y_0/K}$, d'on, via (**):

$$y(t) = \frac{K\cdot y_0\cdot e^{rt}}{K + y_0\cdot(e^{rt}-1)} = \frac{y_0\, e^{rt}}{1+(y_0/K)(e^{rt}-1)}$$

(c) Useu el resultat de (b) per calcular $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ en funció de $y_0>0$.

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{K\cdot y_0}{y_0} = K \leftarrow \text{valor límit per la població independent de } y_0$$

(d) Si per la població humana estimem $r=0.029$ i usem que en 1961 la població de la Terra era $y(1961)=3.06\times 10^9$ i creixia un 2% anualment, useu el model de Verhulst per estimar-ne el valor límit.

Triem l'origen de temps $t=0$ en 1961. Observem que $y'(0)$ ens dona la velocitat de creixement de la població en $t=0$ i, per tant:

$$\underbrace{2\% = 0{,}02 = \frac{y'(0)}{y(0)}}_{\text{igualem "tants per u"}} = r\cdot\left(1-\frac{y_0}{K}\right) \Rightarrow \frac{y_0}{K} = 1-\frac{0.02}{r} \simeq 0.31$$

Via eq. $y'=r\cdot\left(1-\frac{y}{K}\right)y$ $\qquad$ $r=0.029$

D'aquí $K=\frac{y_0}{0.31}=\frac{3.06\times10^9}{0.31}\simeq 9.87\cdot10^9$ (població límit) i ja més

$$y(t)=\frac{3.06\times10^9\cdot e^{0.029\cdot t}}{1+0.31\cdot(e^{0.029t}-1)}$$

Definició (EDOs lineals $\boxed{y' = a(x) \cdot y + b(x)}$)

Són aquelles en que la funció $h(x, y)$ *que defineix l'EDO depèn de forma lineal en la variable* y *. La fórmula següent:*

$$\boxed{y(x; c) = c \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,dx} + \mathrm{e}^{\int a(x)\,dx} \int b(x)\, \mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx}\, dx, \qquad \forall c \in \mathbb{R}}$$

dóna una l'expressió explícita (per quadratures) de la solució general. En el cas particular $b(x) \equiv 0$ *, l'EDO lineal s'anomena homogènia i la solució general esdevé* $y(x; c) = c \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\,dx}$ *.*

Per resoldre les EDOs lineals procediré així:

- **Pas 1:** Calculem $A(X) := \mathrm{e}^{\int a(x)\,dx}$.
- **Pas 2:** Calculem $B(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{A(x)}\, dx$.
- **Pas 3:** La solució general és: $y(x; c) = A(x)\, c + A(x)\, B(x)$.

- Exemple 1: Resolem el P.V.I. $y(0)=1$ per l'edo (lineal):

$$(1-x^2)y' + xy = 1, \quad x\in(-1,1) \iff y' = \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{a(x)} y + \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{b(x)}, \quad x\in(-1,1)$$

$$A(x) := e^{\int a(x)dx} = e^{\int \frac{x}{x^2-1}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-1|} = e^{\ln(1-x^2)^{1/2}} = (1-x^2)^{1/2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$B(x) := \int \frac{b(x)}{A(x)}dx = \int \frac{1/1-x^2}{(1-x^2)^{1/2}}dx = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int (1-x^2)^{-3/2}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Canvi:} \\ x = \sin u \\ dx = \cos u\, du \end{array} \right\} =$$

$$= \int (1-\sin^2 u)^{-3/2}\cdot \cos u\, du = \int (\cos^2 u)^{-3/2}\cos u\, du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Finalment, la solució general de l'edo lineal és:

$$y(x) = A(x)\cdot C + A(x)B(x) = C\sqrt{1-x^2} + x, \quad C\in\mathbb{R}$$

Busquem $C\in\mathbb{R}$ que resol el PVI:

$$1 = y(0) = C\sqrt{1-0^2} + 0 = C \iff C=1$$

obtenim la següent solució: $y(x) = \sqrt{1-x^2} + x$

· Problema 29: Troben la solució general de les següents equacions:

(b) $2xy' - y = 3x^2$, $x>0 \iff y' = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{a(x)} y + \underbrace{\frac{3}{2}x}_{b(x)}$, $x>0$

$$A(x) := e^{\int a(x)dx} = e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln(x^{1/2})} = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$B(x) := \int \frac{b(x)}{A(x)}dx = \frac{3}{2}\int \frac{x}{x^{1/2}}dx = \frac{3}{2}\int x^{1/2}dx = \frac{3}{2}\frac{x^{3/2}}{(3/2)} = x^{3/2}$$

Solució general: $y(x) = c\cdot A(x) + A(x)B(x) = c\sqrt{x} + x^2$, $c \in \mathbb{R}$

(c) $y' + y\cos x = \sin x\cdot\cos x \iff y' = \underbrace{-\cos x}_{a(x)}\cdot y + \underbrace{\sin x\cdot\cos x}_{b(x)}$

$$A(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{-\int\cos x\,dx} = e^{-\sin x}$$

$$B(x) = \int\frac{b(x)}{A(x)}dx = \int e^{\sin x}\sin x\cdot\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integració per parts}\\ u = \sin x \quad\quad\quad\quad \to du = \cos x\,dx\\ dv = e^{\sin x}\cos x\,dx \to v = e^{\sin x}\end{array}\right\} =$$

$$= u\cdot v - \int v\,du = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x}$$

Solució general: $y(x) = c\cdot A(x) + A(x)B(x) = c\,e^{-\sin x} + \sin x - 1$

Definició (EDOs exactes $\boxed{P(x,y) + Q(x,y)\cdot y' = 0}$)

Direm que l'EDO $P(x,y) + Q(x,y)\cdot y' = 0$ *és exacta si* $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}}$

Lavors, existeix una funció $U(x,y)$ *tal que* $\boxed{\dfrac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q}$

i l'expressió $\boxed{U(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}}$ *defineix una familia implícita de solucions de l'EDO.*

Definició (Factor integrant de $\boxed{P(x,y) + Q(x,y)\cdot y' = 0}$)

En el cas que l'EDO **no és exacta**, *direm que la funció* $\mu(x,y)$ *n'és* **un factor integrant** *si l'EDO següent* **sí que és exacta** *:*

$$\boxed{\mu(x,y)\cdot P(x,y) + \mu(x,y)\cdot Q(x,y)\cdot y' = 0}$$

Si $\mu(x,y) \neq 0$ *les dues EDOs tenen* **les mateixes solucions** *.*

Comentari

$\mu = \mu(x, y)$ *factor integrant de* $P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' = 0$ *vol dir:*

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}.$$

En general, trobar un factor integrant és missió impossible. Només ho podem fer si sabem a priori que $\mu(x, y)$ *pren* **una forma concreta** *. Per exemple, quan* $\mu(x, y)$ *és funció només de* x *o bé només de* y *.*

Proposició (Factor integrant funció de x o funció de y)

- *Si* $\boxed{K = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}}$ **només depèn de** x*, llavors* $\boxed{\mu(x) = e^{\int K(x) dx}}$ *és un factor integrant de* $P + Q \cdot y' = 0$ *.*
- *Si* $\boxed{K = -\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}}$ **només depèn de** y*, llavors* $\boxed{\mu(y) = e^{\int K(y) dy}}$ *és un factor integrant de* $P + Q \cdot y' = 0$ *.*

· Exemple 1 : Usem el mètode de resolució d'edo's exactes per trobar una expressió implícita per la solució del PVI :

$$\underbrace{e^x + 3y}_{P(x,y)} + \underbrace{(3x + \cos y)}_{Q(x,y)}\, y' = 0, \quad y(0) = \pi.$$

· Verifiquem que l'edo és exacta $\iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. En efecte:

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$

· Busquem $U = U(x,y)$ verificant:

$$\left.\begin{array}{l} (eq_1)\ \frac{\partial U}{\partial x} = P = e^x + 3y \\ (eq_2)\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q = 3x + \cos y \end{array}\right\}$$

Constatem que resoldre (eq_1) o (eq_2) té el mateix grau de dificultat. Comencem doncs resolent (eq_1)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + 3y \Rightarrow U(x,y) = \int (e^x + 3y)\,dx + \underbrace{\varphi(y)}_{\uparrow} = e^x + 3xy + \varphi(y)$$

"constant integració" = "funció de y"

Ara, determinem $\varphi(y)$ via (eq_2):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x + \varphi'(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{volem}}}{=} 3x + \cos y \Rightarrow \varphi'(y) = \cos y \Rightarrow \varphi(y) = \sin y + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"constant"}}}{C}$$

Per tant, $U(x,y) = e^x + 3xy + \varphi(y) = e^x + 3xy + \sin y + C$, on $C \in \mathbb{R}$ és una constant arbitrària que, ara i sempre, triarem $C = 0$.

Per tant, fent $\tilde{U}(x,y) = e^x + 3xy + \sin y$, hem obtingut la següent família de solucions implícites de l'edo:

$U(x,y) = C \Leftrightarrow e^x + 3xy + \sin y = C, \quad C \in \mathbb{R}$

- Si volem C per tal que dita solució verifiqui el P.V.I. $y(0) = \pi$, fem $x = 0$, $y = \pi \Rightarrow C = e^0 + 3 \cdot 0 \cdot \pi + \sin \pi = 1$

Per tant, la solució del P.V.I. compleix: $e^x + 3xy + \sin y = 1$.

- Exemple 2: Ídem per P.V.I: $\underbrace{4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + 2x}_{P(x,y)} + \underbrace{(x^4 e^{x+y} + 2y)}_{Q(x,y)} y' = 0$, $y(0) = 1$

- Verifiquem que l'edo és exacta $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. En efecte:

$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y}$

• Busquem $U = U(x,y)$ verificant:

$$\left.\begin{aligned} (eq_1)\ \frac{\partial U}{\partial x} &= P = 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + 2x \\ (eq_2)\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Q = x^4 e^{x+y} + 2y \end{aligned}\right\}$$

Resolem 1er. (eq_2) ja que resoldre (eq_1) força a integrar $\int x^3 e^x dx$, $\int x^4 e^x dx$.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^4 e^{x+y} + 2y \Rightarrow U(x,y) = \int (x^4 e^{x+y} + 2y)\,dy = x^4 e^x \int e^y dy + 2\int y\,dy$$

Per tant: $U(x,y) = x^4 e^{x+y} + y^2 + \varphi(x)$ ("Const. integració" = "funció de x")

Ara, determinem $\varphi(y)$ via (eq_1):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + \varphi'(x) \underset{\text{volem}}{=} 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + 2x$$

D'aquí: $\varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + C$, on triem $C = 0$. Així:

$U(x,y) = x^4 e^{x+y} + y^2 + \varphi(x) = x^4 e^{x+y} + y^2 + x^2$ i hem obtingut

la següent família de solucions implícites de l'edo:

$$U(x,y) = c \iff x^4 e^{x+y} + y^2 + x^2 = c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

• Busquem c per resoldre el P.V.I. $y(0) = 1$ fent $x = 0, y = 1$: $c = 1$

Per tant la solució del PVI compleix $(*)$ amb $c = 1$

· <u>Exemple</u>: Resoleu l'edo següent sabent que admet un factor integrant $\mu = \mu(x)$ que només depèn de x:

$$\underbrace{2x^2 + y}_{P(x,y)} + \underbrace{(x^2y - x)}_{Q(x,y)} \cdot y' = 0 \quad , x>0 .$$

· $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 2xy - 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ l'edo <u>No</u> és exacta.

· Calculem: $K = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{(1)-(2xy-1)}{x^2y - x} = \frac{-2(xy-1)}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x}$ ≡ Només depèn de x!

· Fem: $\mu(x) = \exp\left(\int K(x)\,dx\right) = e^{-\int 2/x \, dx} = e^{-2\ln(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ factor integrant

· Per tant, si multipliquem l'edo per $\mu(x) = x^{-2}$ es devé exacta, amb les mateixes solucions que l'original:

$$\underbrace{2 + y\,x^{-2}}_{\tilde{P}(x,y)} + \underbrace{(y - x^{-1})}_{\tilde{Q}(x,y)}\, y' = 0 \quad , \text{on: } \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = x^{-2} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}$$

Resolem l'edo exacta $\underbrace{2+y\cdot x^{-2}}_{\substack{\shortparallel \\ \hat{P}(x,y)}} + \underbrace{(y-x^{-1})}_{\substack{\shortparallel \\ \tilde{Q}(x,y)}} y'$

Busquem $U(x,y)$ tal que:

(eq1) $\frac{\partial U}{\partial x} = \hat{P} = 2 + y\cdot x^{-2}$ (eq2) $\frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q} = y - x^{-1}$

· Resolem 1er. (eq2) per $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int (y-x^{-1})\,dy + \varphi(x) = \frac{y^2}{2} - y\cdot x^{-1} + \varphi(x)$$

· Ajustem $\varphi(x)$ per tal que $U(x,y)$ verifiqui (eq1):

$$2+y\cdot x^{-2} = \frac{\partial U}{\partial x} = y\,x^{-2} + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 2 \Rightarrow \varphi(x) = 2x.$$

· Triem $U(x,y) = \frac{y^2}{2} - y\cdot x^{-1} + 2x.$

· La solució general de l'edo inicial és $U(x,y) = C \equiv$ Const

És a dir. $\boxed{\frac{y^2}{2} - y\cdot x^{-1} + 2x = C}$

· $\underline{\text{Exemple}}$: Resolem l'edo següent sabent que admet un factor integrant $\mu = \mu(y)$ que només depèn de y:

$$\underbrace{y}_{P(x,y)} + \underbrace{(2x - 2e^{y^2})}_{Q(x,y)}\, y' = 0 \quad , \quad y > 0$$

· $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ L'edo no és exacta!

· Calculem: $K = -\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = -\dfrac{(1)-(2)}{y} = \dfrac{1}{y} \equiv$ només depèn de y !

Fem $\mu(y) = \exp\left(\int K(y)\,dy\right) = e^{\int dy/y} = e^{\ln(y)} = y$

· Per tant, si multipliquem l'edo per $\mu(y) = y$ esdevé exacta, amb les mateixes solucions que l'original:

$$y^2 + (2xy - 2y e^{y^2})\, y' = 0.$$

La seva solució general és (exercici) $U(x,y) = c \equiv$ const. on:

$U(x,y) = y^2 x - e^{y^2}$