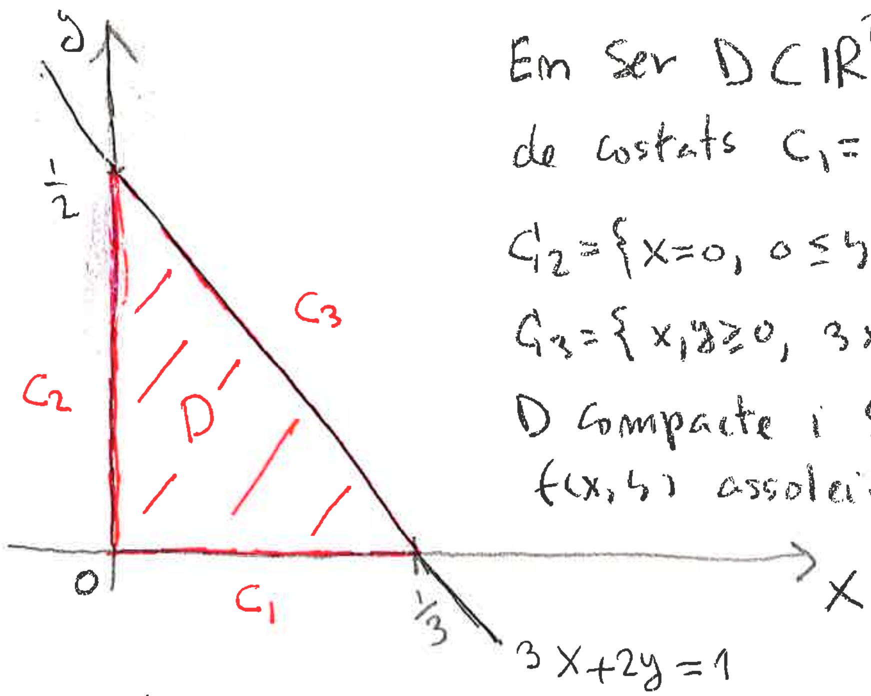
(57) Calculeu els màxim absolut de la funció $U(x,y,z) = x y^2 z^3$, on $x, y, z \geq 0$ verifiquen el lligam $3x + 2y + z = 1$. Per fer-ho, expresseu $U(x,y,z)$ com una funció de $(x,y) \in D$ per un cert domini (compacte) D.

$3x + 2y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - 3x - 2y$. Per tant, la funció de (x,y) a considerar és:

$$f(x,y) = U(x,y,1-3x-2y) = x \cdot y^2 \cdot (1-3x-2y)^3$$

El domini per (x,y) surt de les restriccions $x, y, z \geq 0$:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1-3x-2y \geq 0\}$$



En ser $D \subset \mathbb{R}^2$ un triangle de costats $C_1 = \{y=0,\ 0 \leq x \leq 1/3\}$, $C_2 = \{x=0,\ 0 \leq y \leq 1/2\}$ i $C_3 = \{x,y \geq 0,\ 3x+2y=1\}$, llavors D compacte i sabem que $f(x,y)$ assoleix els seus extrems absoluts en D.

- Els possibles extrems absoluts en l'interior de D han de ser punts crítics de $f(x,y)$, complint $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Així:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(1-3x-2y)^3 - 9xy^2(1-3x-2y)^2 = y^2(1-3x-2y)^2(1-12x-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy(1-3x-2y)^3 - 6xy^2(1-3x-2y)^2 = 2xy(1-3x-2y)^2(1-3x-5y).$$

Com les condicions $x=0$, $y=0$ o $1-3x-2y=0$ defineixen punts de la frontera de D, els possibles punts crítics de f en l'interior de D han de verificar:

$$\left.\begin{array}{l} 1-12x-2y=0 \\ 1-3x-5y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1a.\ eq)-4\cdot(2a.\ eq): -3+18y=0 \Rightarrow y=1/6 \\ 3x=1-5y=1-5/6=1/6 \Rightarrow x=1/18 \end{array}$$

Així $(x,y)=(1/18,1/6)$ és l'únic punt crític de f en tot $\mathbb{R}^2$, complint $x\geq 0$, $y\geq 0$ i $1-3x-2y=\frac{1}{2}\geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{18},\frac{1}{6}\right)\in D$

A més, $f\left(\frac{1}{18},\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{5184}>0$.

Clarament, $f(x,y,z)=0$ en la frontera de D, ja que en C_1 tenim $y=0$, en C_2 tenim $x=0$ i en C_3 tenim $1-3x-2y=0$. Per tant, el màxim absolut de $f(x,y)$ en D és $(x,y)=\left(\frac{1}{18},\frac{1}{6}\right)$, que en termes de (x,y,z) correspon al punt $(x,y,z)=\left(\frac{1}{18},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$