(38) Una sargantana es mou sobre el semiplà $\{x \geq 3\}$ on la temperatura en cada punt ve donada per l'expressió $T(x,y) = \frac{x-3}{x^2+y^2}$. Suposem que la sargantana busca l'escalfor i es mou sempre en la direcció on la temperatura creix més ràpidament.

(a) Si en un instant donat la sargantana és al punt $(3,4)$, en quina direcció es mourà? Quin és l'increment de temperatura aproximat que experimentarà si es desplaça una petita quantitat h en aquesta direcció?

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-(x-3)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+6x}{(x^2+y^2)^2} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-2(x-3)y}{(x^2+y^2)^2} ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(3,4) = \frac{16-9+18}{(9+16)^2} = \frac{25}{25^2} = \frac{1}{25} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) = \frac{-2\cdot(3-3)\cdot 4}{(9+16)^2} = 0 .$$

$$\text{grad}\, T(3,4) = (1/25, 0) \quad , \quad \|\text{grad}\, T(3,4)\| = \sqrt{\frac{1}{25^2}+0^2} = \frac{1}{25} .$$

$$v = \frac{\text{grad}\, T(3,4)}{\|\text{grad}\, T(3,4)\|} = (1,0)$$ direcció de màxim creixement

La variació de T en aquesta direcció ve donada per:

$$D_v T(3,4) = \|\text{grad}\, T(3,4)\| = \frac{1}{25}$$ derivada en la direcció de v: derivada direccional màxima.

$$T(3,4) = 0$$

$$T((3,4)+h(1,0)) = T(3+h,4) \simeq 0 + h/25$$

(b) Busqueu l'únic extrem relatiu de $T(x,y)$ en el semi-plà $\{x > 3\}$ i classifiqueu-lo.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \iff \underbrace{x=3}_{\text{No!}} \text{ ó } y = 0$$

Llavors, si $y=0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ sii. $-x^2+6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{No!} \\ x=6 \end{cases}$

L'únic candidat a extrem si $x>3$ és $(6,0)$.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-2x+6}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(y^2-x^2+6x)4x}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2(x^3-9x^2-3xy^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(y^2-x^2+6x)4y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2(-3x^2y+12xy)+y^3)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{2(x-3)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8(x-3)y^2}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{2(x-3)(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(6,0) = \frac{2(6^3-9\cdot 6^2)}{6^6} = -\frac{1}{6^3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(6,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(6,0) = -\frac{2\cdot 3\cdot 6^2}{6^6} = -\frac{1}{6^3} \quad ; \quad \underbrace{H_T}_{\text{Hessià}}(6,0) = \begin{pmatrix} -1/6^3 & 0 \\ 0 & -1/6^3 \end{pmatrix}$$

tots els vaps de $H_T(6,0)$ són $<0 \Rightarrow$ màx. relatiu.

(c) Busqueu i dibuixeu les corbes de nivell de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$.

$$C_\lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x-3}{x^2+y^2} = \lambda \right\}$$

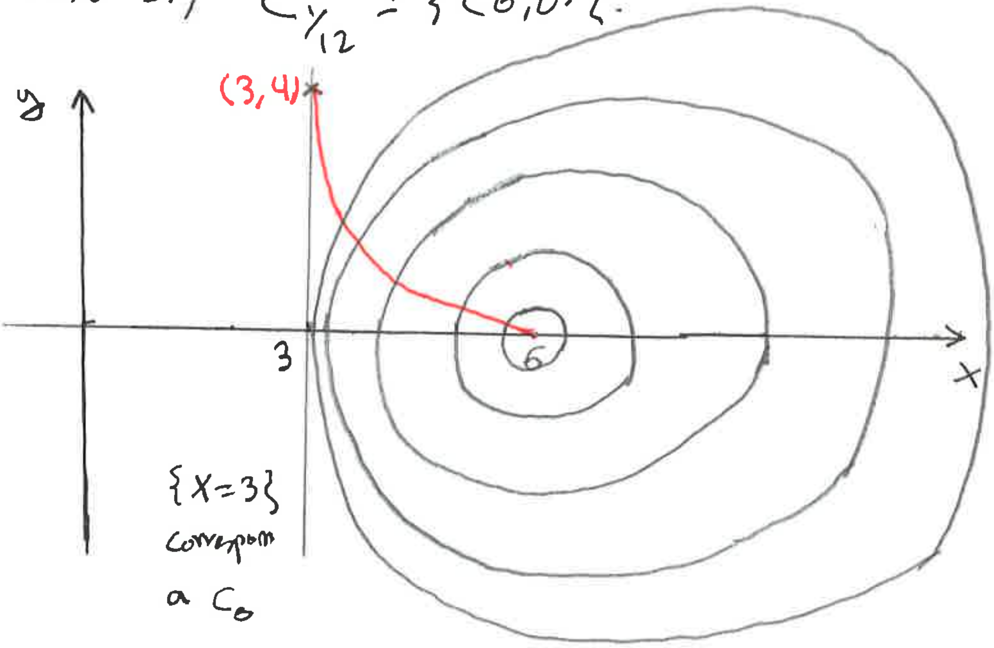
cal: $x-3 = \lambda(x^2+y^2) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} x^2 - \frac{x}{\lambda} + y^2 = -\frac{3}{\lambda} \Rightarrow$

(λ ha de ser >0)

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2\lambda}\right)^2 + y^2 = -\frac{3}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1-12\lambda}{4\lambda^2} = \left(\frac{\sqrt{1-12\lambda}}{2\lambda}\right)^2$$

C_λ és una circumferència de centre $\frac{1}{2\lambda}$ i radi $\frac{\sqrt{1-12\lambda}}{2\lambda}$. Per tant cal $\lambda \in (0, 1/12)$.

observem que si $\lambda = \frac{1}{12}$, llavors $C_{1/12}$ és $(x-6)^2+y^2=0$, això és, $C_{1/12} = \{(6,0)\}$.



(d) Usant el croquis de l'apartat anterior expliqueu perquè l'extrem relatiu de l'apartat (b) és el màxim absolut de T en el semiplà $\{x \geq 3\}$.

Ja hem vist de $\lambda = 1/12$ és el valor màxim que $T(x,y)$ pot admetre en $\{x>3\}$ per definir la corba de nivell C_λ. A més, $C_{1/12} = \{(6,0)\}$, i sobre la recta $x=3$ la funció $T(x,y)$ val zero.

(e) Feu un dibuix esquemàtic de la trajectòria que seguirà la sargantana des del punt $(3,4)$ fins aquest màxim absolut en la seva recerca de la màxima escalfor possible. (No demanem que sigueu rigurosos en la justificació del dibuix.)

Vegeu la corba vermella de (c). Només cal comentar que la corba talla les corbes de nivell en la direcció on la pendent és més gran, això és, quan més s'apreten.