(34) Troben els màxims i mínims absoluts (si existeixen) de les següents funcions de dues variables definides en els dominis D que s'indiquen. Justifiquen la resposta en cada cas.

(a) $f(x,y) = (x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$, $D = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2x\,[1-(x^2+2y^2)] \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)}\, 2y\,[2-(x^2+2y^2)] \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bé} \\ x^2+2y^2 = 1 \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ \text{o bé} \\ x^2+2y^2 = 2. \end{cases}$$

Llavors els candidats a extrems relatius són:

- $x=0,\ y=0 \Rightarrow (0,0)$
- $x=0,\ x^2+2y^2=2 \Rightarrow (0,\pm 1)$
- $x^2+2y^2=1,\ y=0 \Rightarrow (\pm 1, 0)$
- $x^2+2y^2=1,\ x^2+2y^2=2 \Rightarrow$ Cap!

Calculem el Hessià de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4x^2 e^{-(x^2+y^2)}[1-(x^2+2y^2)] + e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2 \cdot [1-(x^2+2y^2)] + e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2x \cdot (-2x)$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}\,[-4x^2+4x^4+8x^2y^2+2-2x^2-4y^2-4x^2]$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}\,[2-10x^2-4y^2+4x^4+8x^2y^2].$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}(-4xy)[1-(x^2+2y^2)] + e^{-(x^2+y^2)}\, 2x\,(-4y)$$

$$= -e^{-(x^2+y^2)}\, 4xy\,[3-(x^2+2y^2)].$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4y^2 e^{-(x^2+y^2)}[2-(x^2+2y^2)] + e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2 \cdot [2-(x^2+2y^2)] + e^{-(x^2+y^2)} \cdot 2y \cdot (-4y)$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}[-8y^2+4x^2y^2+8y^4+4-2x^2-4y^2-8y^2]$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}[4-2x^2-20y^2+8y^4+4x^2y^2].$$

Així:

$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4 \cdot e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$ vap's $-4 \cdot e^{-1} < 0$ i $2 \cdot e^{-1} > 0$ punts de sella.

$H_f(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}$ vap's $-2 \cdot e^{-1} < 0$ i $-8 \cdot e^{-1} < 0$ màxims relatius

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ Vap's $2 > 0$ i $4 > 0$. Mínim relatiu.

Com que $f(x,y) \geq 0$ sempre i $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = 0$

(Calculen $\lim_{z \to +\infty} e^{-z} = 0$ per L'Hôpital per veure el perquè)

És clar que:

$f(0,0) = 0$ és el mínim absolut de f.

$f(0, \pm 1) = 2e^{-1}$ són els màxims absoluts de f.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$, $D = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - 1 \end{aligned}\right\}$$ Si igualem a zero $\Rightarrow (1/2, 1/2)$ és l'únic candidat a extrem relatiu de f

$$H_f(1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ vap's $> 0 \Rightarrow$ mínim relatiu

Però $f(x,y) = (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + 1/2$.

Llavors $f(1/2, 1/2) = 1/2$ i $f(x,y) > \frac{1}{2}$ si $(x,y) \neq (1/2, 1/2)$.

Així $(1/2, 1/2)$ és el mínim absolut de f i no hi ha màxim absolut ja que si (x,y) creixen llavors $f(x,y) \to +\infty$.

(c) $f(x,y) = x^2+y^2-x-y+1$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

Idèntica funció que en (b), però ara només volem discutir els seus ~~e~~ extrems en el disc de centre (0,0) i radi 1.

Com que $\underbrace{(1/2, 1/2) \in D}_{\text{Ja que } (\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2<1} \Rightarrow (1/2, 1/2)$ és també el mínim absolut de f en el disc.

Falta veure què succeeix en la frontera del disc, això és, si $x^2+y^2=1$. Si escrivim $x=\cos\theta$ i $y=\sin\theta$, amb $\theta\in[0,2\pi]$, llavors estudiar els extrems de f en la frontera vol dir estudiar els extrems de

$$h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta+\sin^2\theta-\cos\theta-\sin\theta+1$$
$$= 2-\cos\theta-\sin\theta, \quad \theta\in[0,2\pi].$$

$$h'(\theta) = \sin\theta-\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = 1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \text{ o } \theta=\frac{5\pi}{4}$$

- Si $\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow (x,y)=(\cos\theta, \sin\theta) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$$f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2-\sqrt{2}$$

- Si $\theta=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow (x,y)=(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$; $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = 2+\sqrt{2}$

Com que f no té més extrems relatius que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en l'interior del disc, el seu màxim absolut ha de ser en la frontera del disc i per tant és $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

(d) $f(x,y)=\sin x+\cos y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2\pi\}$.

• Comencem buscant els candidats a extrems relatius en l'interior del rectangle D:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos x\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\sin y\end{array}\right\}$$

Si igualem a zero obtenim (en D):

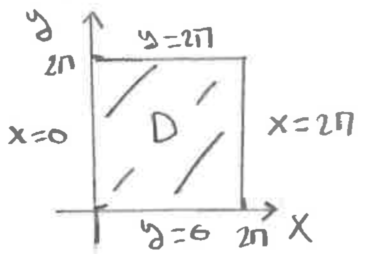
$\{x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{2}\}$ i $\{y=0,\ y=\pi,\ y=2\pi\}$

Si ens restringim a l'interior de D, els candidats a extrems relatius són: $(\frac{\pi}{2},\pi)$, $(\frac{3\pi}{2},\pi)$.

Mitjançant el càlcul de les derivades 2ones. de f, fàcilment els podem classificar (màxim/mínim/punt de sella). Observeu però, que com només volem els extrem absoluts no ens cal fer-ho! Només ens calen els valors de f:

$f(\frac{\pi}{2},\pi)=0$, $f(\frac{3\pi}{2},\pi)=-2$

• Si ens fixem ara en els valors de f en la frontera del rectangle (els seus costats) tenim:



Per discutir els valors de f en els 4 costats cal estudiar les següents funcions:

$g(x)=f(x,0)=f(x,2\pi)=1+\sin x$, $x\in[0,2\pi]$.

$h(y)=g(0,y)=g(2\pi,y)=\cos y$, $y\in[0,2\pi]$

Per tant, fàcilment veiem que els extrems absoluts de f en D són:

• màxims absoluts: $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},2\pi)$ i f val 2.

• mínim absolut: $(\frac{3\pi}{2},\pi)$ i f val -2.