

(50) Sigui el sistema

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, u, v) &:= x^2 y - \ln(u \cdot v^2) = 0 \\ f_2(x, y, u, v) &:= x^2 u^2 - y^3 + x v - 2 = 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

(a) Proven que defineix dues funcions implícites $u(x, y), v(x, y)$ localment en el punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 0, 1, -1)$.

Apliquem el ta de la funcions implícites. observem:

(1) $f_1, f_2 \in C^\infty$ si $u \cdot v^2 > 0$.

(2) $\left. \begin{aligned} f_1(2, 0, 1, -1) &= 2^2 \cdot 0 - \ln(1 \cdot (-1)^2) = 0 \\ f_2(2, 0, 1, -1) &= 2^2 \cdot 1^2 - 0^3 + 2 \cdot (-1) - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{El punt triat és solució.}$

(3) $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u} & -\frac{2}{v} \\ 2ux^2 & x \end{pmatrix}$

on usem $\ln(u \cdot v^2) = \ln u + 2 \ln |v|$ i $\frac{d}{dv} \ln |v| = \frac{1}{v}$. Així:

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} (2, 0, 1, -1) \right) = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = -18 \neq 0$$

Per tant, podem aplicar el ta de la funcions implícites al sistema (*) en el punt $(2, 0, 1, -1)$ i definir dues funcions $u = u(x, y), v = v(x, y)$, localment entorn d'aquest punt, verificant:

(i) $u(x, y), v(x, y)$ són C^∞

(ii) $u \underset{x_0}{\underset{y_0}{\underset{u_0}{(2, 0)}}} = 1, v \underset{x_0}{\underset{y_0}{\underset{v_0}{(2, 0)}}} = -1$

$$(iii) \left. \begin{aligned} f_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) &= 0 \\ f_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) &= 0 \end{aligned} \right\} \forall (x, y) \text{ en el domini de } u(x, y), v(x, y).$$

(b) Sigui $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ on les components de g són les funcions de (a). Calcular $Dg(2, 0)$. Cal doncs calcular les derivades parcials de $u(x, y)$, $v(x, y)$ en el punt $(2, 0)$. Ho podem fer de dues maneres:

(I) Derivant implícitament les equacions de $u(x, y)$, $v(x, y)$. Així vol dir, considerar les equacions per aquestes funcions que es deriven del punt (i.e.) més amunt i derivant-les respecte de x, y entonant ara que $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ són funcions de x, y . Així és:

$$\left. \begin{aligned} x^2 \cdot y - \ln(u(x, y)) - 2 \ln|v(x, y)| &= 0 \\ x^2 u(x, y)^2 - y^3 + x v(x, y) - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} (**)$$

Si derivem (**) resp. de x (no explícitem la dependència de u, v en x, y):

$$\left. \begin{aligned} 2xy - \frac{u_x}{u} - 2 \frac{v_x}{v} &= 0 \\ 2x u^2 + 2x^2 u u_x + v + x v_x &= 0 \end{aligned} \right\} \left(\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ v_x &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right)$$

Fent $x=2, y=0, u=u(2, 0)=1, v=v(2, 0)=-1$:

$$\left. \begin{aligned} -u_x(2, 0) + 2v_x(2, 0) &= 0 \\ 8u_x(2, 0) + 2v_x(2, 0) &= -3 \end{aligned} \right\}$$

Resolent aquest sistema lineal: $u_x(2,0) = -\frac{1}{3}$, $v_x(2,0) = -\frac{1}{6}$

Si derivem (*) resp. de y i avaluem en el mateix punt:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - \frac{u_y}{u} - \frac{2v_y}{v} &= 0 \\ 2x^2 u u_y - 3y^2 + x v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -u_y(2,0) + 2v_y(2,0) &= -4 \\ 8u_y(2,0) + 2v_y(2,0) &= 0 \end{aligned}$$

Resolent el sistema: $u_y(2,0) = \frac{4}{9}$, $v_y(2,0) = -\frac{16}{9}$.

(II) Usar la fórmula "compacta" que ens proporciona el ts de la implícita.

$$\underbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}_{\text{deriv. parcials funcions aïllades resp. les altres variables en el punt triat}}(2,0) = - \underbrace{\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)}(2,0,1,-1) \right)^{-1}}_{\text{inversa matriu de deriv. parcials de les funcions definint les equacions resp. les variables que aïllem en el punt triat}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}(2,0,1,-1) \right)}_{\text{matriu deriv. parcials funcions definint les equacions resp. les variables que fan paper de paràmetres en el punt triat.}}$$

deriv. parcials
funcions aïllades
resp. les altres
variables en el
punt triat

inversa matriu de deriv.
parcials de les funcions
definint les equacions
resp. les variables que
aïllem en el punt triat

matriu deriv.
parcials funcions
definint les equacions
resp. les variables
que fan paper de
paràmetres en el
punt triat.

Hem vist:

$$(\text{determinant} = -\frac{1}{18})$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)}(2,0,1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)} \right)^{-1}(2,0,1,-1) = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$$

A més:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2xu^2 + v - 3y^2 & \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}(2,0,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

D'on:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(2,0) = - \left(-\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -3 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

3/6

Usant ara que $g = (u, v)$:

$$Dg(2,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(2,0) & \frac{\partial u}{\partial y}(2,0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(2,0) & \frac{\partial v}{\partial y}(2,0) \end{pmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(2,0) = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 \\ -1/6 & -16/9 \end{pmatrix}$$

(c) Proven que en $(2,0)$ la funció $g = (u, v)$ és localment invertible. Justifiqua que

$$g^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

on $x(u, v), y(u, v)$ són les altres funcions definides pel sistema donat en el mateix punt.

Usant que $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ és C^∞ , podem aplicar el teorema de la funció inversa a $g(x, y)$ en el punt $(x, y) = (2, 0)$ si, el determinant de la seva matriu Jacobiana en aquest punt és no nul:

$$\det(Dg(2,0)) = \begin{vmatrix} -1/3 & 4/9 \\ -1/6 & -16/9 \end{vmatrix} = -\frac{4}{6 \cdot 9} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{4}{6 \cdot 9} (-9) = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Com que les funcions $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ s'han obtingut aïllant u, v en termes de x, y en el sistema inicial, i la inversa de $g(x, y) = (u, v)$ al que fa és donar-nos $x(x, y) = g^{-1}(u, v)$, així és, x, y en termes de u, v , llavors les expressions per x, y en funció de u, v que obtenim són les mateixes que si apliquem el teorema implícit a $f_1 = f_2 = 0$.
Per expressar $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. 4/6

cd) Calcular la matriz de derivadas de la función inversa local de g en el punto $(2,0)$ utilizando:

(d1) El teorema de la función inversa.

$g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ es decir $g(2,0) = (1,-1)$,
 ya que $u(2,0) = 1$, $v(2,0) = -1$. Por tanto, via
 el 1° de la función inversa tenemos:

$$Dg^{-1}(1,-1) = \underset{\uparrow}{(Dg(2,0))^{-1}} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 \\ -1/6 & -16/9 \end{pmatrix}^{-1} = \underset{\uparrow}{\frac{1}{2/3}} \begin{pmatrix} -16/9 & -4/9 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$g(2,0) = (1,-1) \Rightarrow g^{-1}(1,-1) = (2,0) \quad \det Dg(2,0) = 2/3$$

$$= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -16/9 & -4/9 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

cd2) El teorema de la función implícita.

Si aïllem $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ en torn del

Punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 0, 1, -1)$ com a solució del

Sistema $f_1 = f_2 = 0$, el càlcul que hem de fer per

calcular $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,-1) = Dg^{-1}(1,-1)$ és (veure (b. II)):

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,-1) = - \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}(2,0,1,-1) \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u,v)}(2,0,1,-1) \right) =$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -32 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 1/4 & -1/6 \end{pmatrix}$$

cc) Trobem $u_{xx}(2,0)$, $v_{xx}(2,0)$.

En (6.I) hem derivat implícitament resp. de x el sistema d'equacions i hem obtingut. Cometem la dependència de u, v en x, y :

$$\left. \begin{aligned} 2xy - \frac{u_x}{u} - 2\frac{v_x}{v} &= 0 \\ 2xu^2 + 2x^2u u_x + v + x v_x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si ara formem a derivar resp. de x les dues equacions:

$$\left. \begin{aligned} 2y - \left(\frac{u_{xx} \cdot u - u_x^2}{u^2} \right) - 2 \left(\frac{v_{xx} \cdot v - v_x^2}{v^2} \right) &= 0 \\ 2u^2 + 8xu \cdot u_x + 2x^2u_x^2 + 2x^2u u_{xx} + 2v_x + x v_{xx} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Fem ara $x=2, y=0, u=u(2,0)=1, v=v(2,0)=-1$,

$$u_x = u_x(2,0) = -1/3, \quad v_x = v_x(2,0) = -1/6,$$

$u_{xx} = u_{xx}(2,0), \quad v_{xx} = v_{xx}(2,0)$, per obtenir:

$$\left. \begin{aligned} -(u_{xx}(2,0) - 1/9) - 2(-v_{xx}(2,0) - 1/36) &= 0 \\ 2 - 16/3 + 8/9 + 8u_x(2,0) - 1/3 + 2v_{xx}(2,0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -u_{xx}(2,0) + 2v_{xx}(2,0) &= -1/6 \\ 8u_{xx}(2,0) + 2v_{xx}(2,0) &= 25/9 \end{aligned} \right\}$$

Resolent el sistema lineal:

$$9u_{xx}(2,0) = \frac{25}{9} + \frac{1}{6} = \frac{53}{18} \Rightarrow u_{xx}(2,0) = 53/162$$

$$18v_{xx}(2,0) = -\frac{8}{6} + \frac{25}{9} = \frac{13}{9} \Rightarrow v_{xx}(2,0) = 13/162$$