(38) El sistema

$$\left.\begin{aligned} x\cos v + \pi &= y + y\sin u \\ u \sin x &= v \cos y \end{aligned}\right\}$$

determina dues funcions $x(u,v)$ i $y(u,v)$ que satisfan $x(\pi,0)=0$ i $y(\pi,0)=\pi$. Sigui ara $h(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ i $g(x,y)=\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Calculen $D(g\circ h)(\pi,0)$ i $D(g\circ h^{-1})(0,\pi)$.

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,u,v) &:= x\cos v + \pi - y - y\sin u = 0 \\ f_2(x,y,u,v) &:= u\sin x - v\cos y = 0 \end{aligned}\right\}$$

. observam que $(x,y,u,v)=(0,\pi,\pi,0)$ n'és solució

$f_1(0,\pi,\pi,0)=f_2(0,\pi,\pi,0)=0$.

. Condició per poder aïllar (x,y) en funció de (u,v) entorn del punt $(x,y,u,v)=(0,\pi,\pi,0)$ via t^a funció implícita:

$$\det\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)\Bigg|_{(0,\pi,\pi,0)} = \begin{vmatrix} \cos v & -1-\sin u \\ u\cos x & v\sin y \end{vmatrix}\Bigg|_{(0,\pi,\pi,0)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{vmatrix} = \pi \neq 0$$

Per tant, les equacions $f_1=f_2=0$ permeten aïllar (x,y) en funció de (u,v), $x=x(u,v)$ i $y=y(u,v)$, complint $x(\pi,0)=0$ i $y(\pi,0)=\pi$.

Calculem les derivades parcials $\frac{\partial x}{\partial u}(\pi,0)$, $\frac{\partial x}{\partial v}(\pi,0)$, $\frac{\partial y}{\partial u}(\pi,0)$ i $\frac{\partial y}{\partial v}(\pi,0)$.

Usant la regla de la cadena:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right)$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{(0,\pi,\pi,0)} = \begin{pmatrix}1&-1\\ \pi&0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}0&1\\-\pi&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix}-y\cos u & -x\sin v\\ \sin x & -\cos y\end{pmatrix}\Big|_{(0,\pi,\pi,0)} = \begin{pmatrix}\pi&0\\0&1\end{pmatrix}$$

D'on:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(\pi,0) & \frac{\partial x}{\partial v}(\pi,0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(\pi,0) & \frac{\partial y}{\partial v}(\pi,0)\end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}0&1\\-\pi&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi&0\\0&1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}0&1\\-\pi^2&1\end{pmatrix}$$

- Fem $h(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$

No tenim cap fórmula per h, però sabem que $h\in C^\infty$ entorn de $(\pi,0)$ i $h(\pi,0)=(0,\pi)$. Volem veure si existeix h^{-1} inversa local de h definida entorn de $(0,\pi)$ i t.q. $h^{-1}(0,\pi)=(\pi,0)$. Per aplicar el t. de la funció inversa només ens cal verificar que $\det Dh(\pi,0)\neq 0$ i en aquest cas Dh coincideix amb la matriu de derivades parcials de $(x(u,v),y(u,v))$ resp. (u,v). Així:

$$Dh(\pi,0) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\pi,0) = \begin{pmatrix}0 & -1/\pi\\ \pi & -1/\pi\end{pmatrix}$$

Així, $\det Dh(\pi,0) = 1 \neq 0$ i $\exists\, h^{-1}$ inversa local de h

A més:

$$Dh^{-1}(0,\pi) \underset{\uparrow}{=} \left(Dh(\pi,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\pi & 1/\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

$h(\pi,0) = (0,\pi)$

$h^{-1}(0,\pi) = (\pi,0)$

- Fem ara $g(x,y) = \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$$Dg(x,y) = \left(\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

- $D(g\circ h)(\pi,0) \underset{\uparrow}{=} Dg(h(\pi,0)) \cdot Dh(\pi,0) =$

regla cadena

$$= Dg(0,\pi) \cdot Dh(\pi,0) = \left(\cos(0) \cdot \frac{\pi^2-0^2}{(\pi^2)^2} \quad \cos(0)\cdot 0 \right) Dh(\pi,0) =$$

$$= (1/\pi^2, 0) \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{pmatrix} = \left(0 \quad -1/\pi^3\right)$$

- $D(g\circ h^{-1})(0,\pi) = Dg(h^{-1}(0,\pi)) \cdot Dh^{-1}(0,\pi) =$

$$= Dg(\pi,0)\, Dh^{-1}(0,\pi) = \left(\cos(1/\pi)\cdot(-1/\pi^2) \quad 0 \right) \begin{pmatrix} -1/\pi & 1/\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \cos(1/\pi) \left(1/\pi^3 \quad -1/\pi^3 \right)$$