(37) El sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+yv+e^{yu}+e^{xv}=3 \\ y-xv+e^{xu}+e^{yv}=3 \end{array}\right\}$$

determina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,1)=v(1,1)=0$. Sigui ara $g(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$. Calculeu $Dg(1,1)$ i $Dg^{-1}(0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y,u,v):=x+yv+e^{yu}+e^{xv}-3=0 \\ f_2(x,y,u,v):=y-xv+e^{xu}+e^{yv}-3=0 \end{array}\right\} \leftarrow$$

observem que $(x,y,u,v)=(1,1,0,0)$ n'és solució

Condició per poder aïllar (u,v) en funció de (x,y) entorn del punt $(x,y,u,v)=(1,1,0,0)$ via el t. de la funció implícita:

$$\det\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right)\Big|_{(1,1,0,0)}=\begin{vmatrix} ye^{yu} & y+xe^{xv} \\ xe^{xu} & -x+ye^{yv}\end{vmatrix}\Big|_{(1,1,0,0)}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

Per tant les equacions $f_1=f_2=0$ permeten aïllar (u,v) en funció de (x,y), $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$, complint $u(1,1)=0$, $v(1,1)=0$.

Calculem les derivades parcials $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$.

Opció 1: Derivar resp. x i resp. y les relacions:

$$\left.\begin{array}{l} x+yv(x,y)+e^{yu(x,y)}+e^{xv(x,y)}-3=0 \\ y-xv(x,y)+e^{xu(x,y)}+e^{yv(x,y)}-3=0 \end{array}\right\}$$

· <u>opció 2</u> : Usar la regla de la cadena:

$$\underbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriu deriv. parcials } (u,v) \\ \text{resp. } (x,y)}} = -\underbrace{\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}}_{\substack{\text{in} \uparrow \\ \text{inversa matriu deriv. parcials} \\ \text{de } (f_1,f_2) \text{ resp. } (u,v) \\ \text{[variables que aïllem]}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriu deriv. parcials de } (f_1,f_2) \\ \text{resp. } (x,y) \\ \text{[variables de les que dependran } (u,v)\text{]}}}$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\Big|_{(1,1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\Big|_{(1,1,0,0)} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{(1,1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1+ve^{xv} & v+ue^{yu} \\ -v+ue^{xu} & 1+ve^{yv} \end{pmatrix}\Big|_{(1,1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'on:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = -\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

· Fem $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

No tenim cap fórmula per g, però sabem que

$g(1,1) = (0,0)$ i $g \in C^\infty$ entorn de $(1,1)$.

Ens pregunten doncs si existeix inversa local definida entorn de $(0,0)$ i t.q. $g^{-1}(0,0) = (1,1)$

$$\begin{tikzcd} \underset{(1,1)}{\overset{(x,y)}{\times}} \arrow[r, bend left, "g"] & \underset{(0,0)}{\overset{(u,v)}{\times}} \arrow[l, bend left, "¿g^{-1}?"] \end{tikzcd}$$

Per aplicar el T^{a} de la funció inversa cal que $\det Dg(1,1) \neq 0$. En aquest cas, $Dg(1,1)$ coincideix amb la matriu de derivades parcials de $(u(x,y), v(x,y))$ resp. (x,y),

$$Dg(1,1) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Així $\det Dg(1,1) = -1/2 \neq 0$.

Per tant $\exists\, g^{-1}$ inversa local de g. A més:

$$Dg^{-1}(0,0) \underset{\uparrow}{=} \left(Dg(1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$g(1,1) = (0,0)$
$g^{-1}(0,0) = (1,1)$