35 Sigui $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$, definida per $f(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$. Proveu que f té inversa global $f^{-1}: B \to A$, on $B = f(A)$, i identifiqueu B (domini de f^{-1}).

- Existència d'inversa local? $f \in C^\infty(A)$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \det Df(x,y) = 2(x^2+y^2),$$

si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, llavors $\det Df(x_0,y_0) \neq (0,0)$.

Per tant, $\forall (x_0,y_0) \in A$, $\exists f^{-1}$ inversa local de f definida entorn de $f(x_0,y_0)$ i t.q. $f^{-1}(f(x_0,y_0)) = (x_0,y_0)$

Podem calcular la matriu de derivades parcials de f^{-1} usant:

$$Df^{-1}(f(x,y)) = [Df(x,y)]^{-1} = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & 2x \end{pmatrix}$$

observem que aquesta fórmula no ens permet donar, directament, l'expressió de $Df^{-1}(u,v)$ en termes de (u,v).

- Existència d'inversa global? L'existència d'inversa local entorn de tot punt no ens garanteix que f tingui una inversa global. Si existeix inversa global, per calcular-la hem de resoldre el següent sistema d'equacions:

$$f(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = u & (eq_1) \\ xy = v & (eq_2) \end{cases}$$

si podem aïllar (x,y) en termes de (u,v) llavors tindrem f^{-1}:

$$(eq_2) \Rightarrow y = v/x \overset{(eq_1)}{\Longrightarrow} x^2 - v^2/x^2 = u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - ux^2 - v^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{u \pm \sqrt{u^2+4v^2}}{2}$$

Hi ha 2 possibles tries de signe, però si volem $x^2 \geq 0$ cal triar $+$: $x = \pm\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}$ ← signe $+$ ja que $x>0$

Ídem: $x = v/y \Rightarrow \frac{v^2}{y^2} - y^2 = u \Rightarrow y^4 + uy^2 - v^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}$$ ← signe $+$ ja que $y>0$

Llavors $f^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}\right)$

per identificar B, observem que per tal que les equacions (eq_1) i (eq_2) puguin tenir solució $x, y > 0$ només cal que $v > 0$, ja que llavors $f^{-1}(u,v)$ té sentit. Per tant $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$.

Ara podem calcular $Df^{-1}(u,v)$ derivant directament aquestes expressions. (uf!) Una altra idea és usar l'expressió de la Pàgina 1 i substituïn (x,y) per les seves expressions en termes de (u,v):

$$Df^{-1}(u,v)=\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}} & 2\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}} \\ -\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}} & 2\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}} \end{bmatrix}$$

On: $x^2+y^2=\frac{u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}+\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}=\sqrt{u^2+4v^2}$