(34) Sigui $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x-y)$.
Proveu que f té una inversa global i calculeu la seva matriu de derivades.

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és C^∞ arreu
- Qüestió 1: Existeix inversa local de f entorn d'un punt (x_0, y_0, z_0) donat? El T^a de la funció inversa ens diu que si $\det(Df(x_0,y_0,z_0)) \neq 0$, llavors $\exists f^{-1}$ inversa local de f t.q. $f^{-1}(f(x_0,y_0,z_0)) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{tikzcd} \underset{(x_0,y_0,z_0)}{\times} \arrow[r, bend left, "f"] & \times\, f(x_0,y_0,z_0) \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

A més, la matriu de derivades d'aquesta inversa local satisfà

$$Df^{-1}(f(x,y,z)) = [Df(x,y,z)]^{-1}.$$

En el nostre cas:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(Df(x,y,z)) = -4e^{2z}(e^{2x} + e^{2y}) \neq 0, \ \forall (x,y,z)$$

Per tant, sigui quin sigui el punt (x_0, y_0, z_0) que triem, sempre existeix inversa local f^{-1} definida en un entorn de $f(x_0, y_0, z_0)$ i t.q. $f^{-1}(f(x_0, y_0, z_0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

Podem calcular la matriu de derivades d'aquesta inversa local invertint $Df(x,y,z)$.

[càlculs: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & -c \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & -c & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -c(a+b)$

$\operatorname{adj}(A^T) = \begin{bmatrix} -c & -c & -bc \\ -c & -c & ac \\ -a & b & -ab \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A^T) = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -a \\ a/c & -b/c & \frac{ab}{c} \end{bmatrix}$

Així:

$$Df^{-1}(f(x,y,z)) = (Df(x,y,z))^{-1} = \frac{1}{2(e^{2x}+e^{2y})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2e^{2y} \\ 1 & 1 & -2e^{2x} \\ e^{2(x-z)} & -e^{2(y-z)} & e^{2(x+y-z)} \end{bmatrix}$$

La pega és que per calcular Df^{-1} amb aquesta fórmula ho podem fer en el punt $f(x,y,z)$. Vull dir que per calcular $Df^{-1}(u,v,w)$ hauríem de saber quin (x,y,z) ens dóna $(u,v,w) = f(x,y,z)$ (i si tal (x,y,z) existeix o no!)

- El fet que f^{-1} tingui inversa local entorn de cada punt no ens garanteix que f tingui <u>inversa global</u>. Per tal que això sigui cert cal que f sigui injectiva en el seu domini $\mathbb{R}^3$. Cal $f(x,y,z) \neq f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ si $(x,y,z) \neq (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. L'únic que sabem ara és que f és <u>localment injectiva</u>

Qüestió 2: Existeix inversa global de f? L'única forma que tenim per veure-ho és mirar de calcular f^{-1} explícitament. Per fer-ho, plantejem el sistema d'equacions

$$f(x,y,z)=(u,v,w) \Longleftrightarrow \begin{cases} (eq_1)\ e^{2y}+e^{2z}=u \\ (eq_2)\ e^{2x}-e^{2z}=v \\ (eq_3)\ x-y=w \end{cases}$$

Si som capaços de trobar-me les solucions per (x,y,z) en termes de (u,v,w) haurem calculat la inversa f^{-1}. Fem:

$$(eq_1)+(eq_2) \Rightarrow e^{2x}+e^{2y}=u+v$$

$$(eq_3) \Rightarrow x=y+w$$

Combinant les 2 expressions:

$$u+v=e^{2(y+w)}+e^{2y}=e^{2y}(1+e^{2w})$$

d'on: $$e^{2y}=\frac{u+v}{1+e^{2w}} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{1+e^{2w}}\right)$$

Si ara usem $(eq_3) \Rightarrow y=x-w$:

$$u+v=e^{2x}(1+e^{-2w}) \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{1+e^{-2w}}\right)$$

Finalment, usant (eq_1):

$$e^{2z}=u-e^{2y}=u-\frac{u+v}{1+e^{2w}};$$ d'on

$$e^{2z} = u - \frac{e^{-w}(u+v)}{e^{-w}+e^{w}} = \frac{ue^{w} - ve^{-w}}{e^{-w}+e^{w}}$$

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{ue^{w} - ve^{-w}}{e^{w}+e^{-w}}\right)$$

Així: $f^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{1+e^{+2w}}\right), \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{1+e^{-2w}}\right),\right.$
$\left.\frac{1}{2}\ln\left(\frac{ue^{w} - ve^{-w}}{e^{w}+e^{-w}}\right)\right)$

Usant:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{1+e^{+2w}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{-w}(u+v)}{e^{w}+e^{-w}}\right) = -\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{e^{w}+e^{-w}}\right)$$

també val:

$$f^{-1}(u,v,w) = \left(-\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{e^{w}+e^{-w}}\right), \frac{w}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+v}{e^{w}+e^{-w}}\right), \frac{1}{2}\ln\left(\frac{ue^{w} - ve^{-w}}{e^{w}+e^{-w}}\right)\right)$$

A partir d'aquesta expressió podem identificar el domini de f^{-1}, cal:

$$D_{f^{-1}} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u+v > 0,\ ue^{w} > ve^{-w}\}$$

També podem calcular la matriu de derivades parcials de f^{-1} (matriu Jacobiana). Observem que les fórmules obtingudes ara sí depenen de (u,v,w) i no de (x,y,z). Si agafem l'expressió per Df^{-1} en la pàgina 2 i expressem (x,y,z)

en termes de (u,v,w) ens han de donar el mateix!

$$Df^{-1}(u,v,w) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2(u+v)} & \dfrac{1}{2(u+v)} & -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{w}-e^{-w}}{e^{w}+e^{-w}} \\ \dfrac{1}{2(u+v)} & \dfrac{1}{2(u+v)} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{w}-e^{-w}}{e^{w}+e^{-w}} \\ \dfrac{e^{w}}{2(ue^{w}-ve^{-w})} & \dfrac{-e^{-w}}{2(ue^{w}-ve^{-w})} & \dfrac{1}{2}\dfrac{ue^{w}+ve^{-w}}{ue^{w}-ve^{-w}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{w}-e^{-w}}{e^{w}+e^{-w}} \end{bmatrix}$$

<u>Nota</u>: Per derivar el logaritme d'un quocient el millor és escriure, p. ex.:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{ue^{w}-ve^{-w}}{e^{w}+e^{-w}}\right) = \frac{1}{2}\ln(ue^{w}-ve^{-w}) - \frac{1}{2}\ln(e^{w}+e^{-w})$$