(32) Determinem el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que:

$$\lim_{(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

---

Recordem: $f(x,y) = \underbrace{P_k(x,y)}_{\text{Taylor de grau } k \text{ en } (0,0)} + \underbrace{R_k(x,y)}_{\text{residu}}$

llavors:

$$\lim_{(0,0)} \frac{R_k(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^k} = 0 \xrightarrow{k=3} \lim_{(0,0)} \frac{R_3(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Calculem taylor de grau 3 de:

$$\arctan(x^2+y) = x^2+y - (x^2+y)^3/3 + O_5(x,y) =$$
$$= x^2+y - y^3/3 + R_3(x,y)$$

Així:

$$\lim_{(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(0,0)} \left( \frac{-(\lambda + 1/3)y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{R_3(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= \lim_{(0,0)} \frac{-(\lambda+1/3)y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

- Si $\lambda = -1/3$, el límit val zero.
- Si $\lambda \neq -1/3$, el límit no existeix, ja que $\nexists \lim_{(0,0)} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

En efecte, si el calculem segons rectes $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{m^3 x^3}{(x^2+m^2x^2)^{3/2}} = \frac{m^3}{(1+m^2)^{3/2}} \quad \text{depèn de } m$$