(27) Considerem la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

L'objectiu bàsic és veure que f no és C^2 en $(0,0)$ (malgrat és clar que, per generació, f és $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$).

Per veure que f no és C^2 en $(0,0)$, calcularem $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (derivades creuades) i veurem que són diferents. Això no pot ser si f és C^2.

1er. pas: Calculem les funcions derivades parcials de f resp. de x i resp. de y.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fórmula de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, surt de derivar resp. de x l'expressió

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}.$$

Per altra banda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = 0.$$

Per obtenir la funció $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, observem que si canviem x per y en la fórmula per $f(x,y)$, llavors la funció és la mateixa canviada de signe. Per tant, derivar f resp. y és com derivar f resp. x, canviar la x per la y i canviar de signe:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(\cancel{x}^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

No és l'objectiu del càlcul, però podeu veure que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}=0$$

Acotem $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ i $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ en el numerador

i idem $\lim_{(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Per tant $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2on pas: calculem les derivades $\underbrace{\text{creuades}}^{\text{en }(0,0)}$ usant la definició de derivades parcials:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

observem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)=\frac{h(0^4+4\cdot 0^2h^2-h^4)}{(0^2+h^2)^2}=-\frac{h^5}{h^4}=-h$. Així:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1.$$

Per l'altra banda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0}1=1\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)=\frac{h^5}{h^4}=h$$