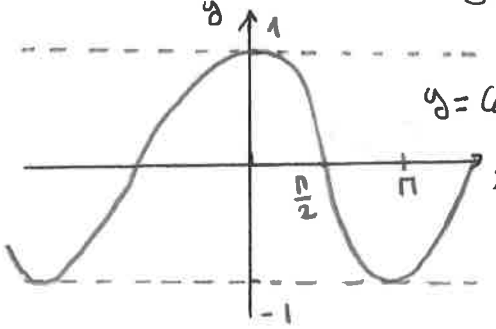
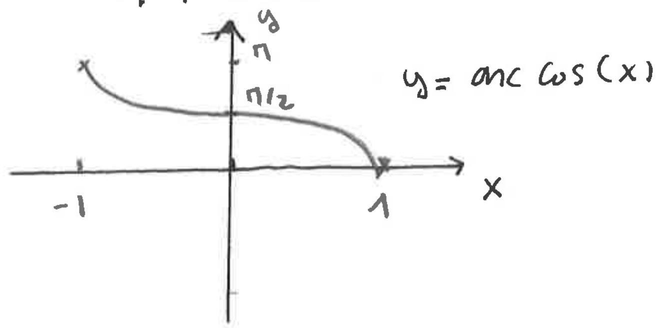
(11) Calculeu (si existeixen) els següents límits:

(a) $$\lim_{(0,1)} \frac{\arccos(x/y)}{1+xy} = \frac{\arccos(0/1)}{1+0\cdot 1} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$





observeu que arccos(·) no presenta cap problema en el zero i per tant la funció és contínua i el límit es pot calcular per substitució directa de (x, y) per (0, 0).

(b) $$\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

És clar que la funció és contínua arreu excepte potser en el (0, 0). El fet que tant el numerador com el denominador tinguin el mateix grau fa pensar que el límit no existeix. Si fem el límit sobre rectes $y = mx$ obtenim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

que depèn de $m \Rightarrow \nexists \lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $\lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Ara observem que és el grau del numerador el que guanya al del denominador. Vegem que el límit existeix mitjançant les acotacions

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad i \quad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Així:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^3}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

també ho podem fer escrivint la funció com el producte d'una funció acotada per un altre que té límit 0:

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\substack{\text{acotada} \\ \text{per } 1}} \cdot \underbrace{y}_{\substack{\text{Tendeix a} \\ \text{zero en } (0,0)}}$$

(d) $\lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

De nou la comparació dels graus del numerador i denominador ens fa pensar que el límit no existeix. Si fem límits per rectes $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \text{ depèn de } m$$

Per tant $\nexists \lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(e) $\lim_{(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$

grau numerador = grau denominador. Fem límits per rectes $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 (mx)^2}{x^4 + (mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{1+m^4} = \frac{m^2}{1+m^4} \quad \text{depèn de } m.$$

Així $\nexists \lim_{(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

(f) $\lim_{(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

Si el fem per rectes $y = mx$ obtenim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x \cdot mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

on usem $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2} = m$.

Per tant $\nexists \lim_{(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$.

observem que si, p. ex., tinguéssim

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

ja que $\lim_{(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} = 1$ (recordeu $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin(z)}{z} = 1$ i feu $z = x^2y$) i ja hem vist $\lim_{(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Aquest argument té una petita pega si $x^2y = 0$, ja que el denominador s'anul·la. Però, si $x = 0$ o $y = 0$ (però no les dues alhora!) llavors $\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} = 0$ i el límit també.

(g) $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

gran numerador $= 2$, "gran denominador" $= 1$
És raonable pensar que el límit pot existir.
Acotem $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ i obtenim:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow \lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(h) $\lim_{(0,0)} xy \ln(x^2+y^2)$

És clar que si $a>0$ (per molt petit que sigui):

$$\lim_{z\to 0^+} z^a \ln(z) = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(z)}{z^{-a}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hôpital } \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{z\to 0^+} \frac{1/z}{-az^{-a-1}} = \lim_{z\to 0^+} -\frac{z^a}{a} = 0.$$

Això motiva pensar que el límit que volem calcular ha de ser zero. Ho podem veure acotant $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$:

$$|xy \ln(x^2+y^2)| \leq |(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2)|$$

Llavors, fent $z = x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ i usant que

$$\lim_{z\to 0^+} z \ln z \underset{\substack{\uparrow \\ (a=1)}}{=} 0, \text{ obtenim } \lim_{(0,0)} xy \ln(x^2+y^2) = 0.$$

També podem usar l'apartat anterior, ja que:

$$xy \ln(x^2+y^2) = \underbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\substack{\text{té límit} = 0 \\ \text{per (g)}}} \cdot \underbrace{(x^2+y^2)^{1/2} \ln(x^2+y^2)}_{\substack{\text{té límit } 0 \text{ ja que} \\ \lim_{z\to 0^+} z^{1/2} \ln z \underset{(a=1/2)}{=} 0}}$$

(j) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ definida si $x,y>0$ i $x\neq y$.

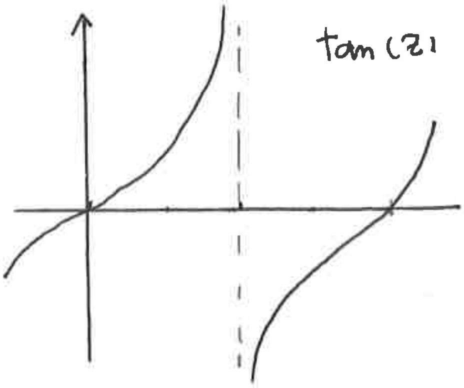
La clau és eliminar les arrels del denominador multiplicant pel conjugat

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x-y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\cdot\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(k) $\lim\limits_{(1,1)} \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+y^2}\right)$

Encara que el límit no és en el $(0,0)$, de fet és un límit "senzill" ja que tenint $z = x^2+y^2$ el valor del límit és el mateix que el el límit d'1 variable $\lim\limits_{z\to 2} \tan\left(\dfrac{\pi}{z}\right) = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \tan(z)$

Si recordem la gràfica de la tangent:



És clar que

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(z) = +\infty$$

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(z) = -\infty.$$

Per tant, $\nexists \lim\limits_{z\to 2} \tan\left(\dfrac{\pi}{z}\right)$ i $\nexists \lim\limits_{(1,1)} \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+y^2}\right)$